

מבחן בתורת הגרפים

סמסטר א' תשס"ז, מועד א'

תאריך: 9.2.2007

מרצה: נוגה אלון

משך הבחינה: 3 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר.
במבחן 6 שאלות, יש לענות על כולן. תשובות נכונות ומלאות על 5 מהשאלות יזכו
אותך ב- 90 נקודות, ותשובות נכונות על כל 6 השאלות ב- 100 נקודות.
התשובה לכל שאלה מורכבת מחלק אחד או שניים, שעל כל אחד מהם להופיע
במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים, ולא לחרוג מן המסגרות
שהוקצו להם. מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד, ולפיכך יש להקפיד ולרשום
את מספר הסטודנט/ית על טופס הבחינה. וודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה
בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
התשובה לכל שאלה חייבת להיות מלווה בהסבר מתאים.

בהצלחה!

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

שאלה 1

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט וקשיר, ובו צומת $v \in V$ מדרגה $d_G(v)=15$. הוכחי שיש ל- G תת-גרף פורש $H=(V,E')$ כך שלכל צומת $u \in V$ מתקיים $\left\lfloor \frac{d_G(u)}{2} \right\rfloor \leq d_H(u) \leq \left\lceil \frac{d_G(u)}{2} \right\rceil$, כאשר כאן $d_H(u)$ מסמן את דרגת u בגרף H , ו- $d_G(u)$ את דרגת u בגרף G .

הוכחה:

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

שאלה 2

יהא G גרף פשוט בעל מספר צביעה $\chi(G)=k$. הוכחי שיש ב- G לפחות k צמתים שדרגתם לפחות $k-1$.

הוכחה:

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

שאלה 3

יהא G גרף דו-צדדי עם קבוצות צמתים A, B ונניח שלכל צומת $a \in A$ יש דרגת חיובית גדולה או שווה מדרגתו של כל אחד משכניה. הוכחי כי יש ב- G זיווג המרווה את כל צמתי A .

הוכחה:

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

שאלה 4

נסחי והוכחי את משפט Dirac (על קיום מעגל המילטון).

משפט Dirac:

הוכחה:

שאלה 5

עבור גרף פשוט $G=(V,E)$ נסמן ב- $G^{(2)}$ את הגרף שצמתיו אוסף הזוגות הסדורים $V \times V = \{(u, v) : u, v \in V\}$ ובו (u_1, v_1) מחובר ל- (u_2, v_2) אם ורק אם $\{u_1, u_2\} \in E$ ו/או $\{v_1, v_2\} \in E$. נניח כי ב- G אין קליק בגודל k . הוכחי כי ב- $G^{(2)}$ אין קליק בגודל 4^k .

הוכחה:

ת.ז.ז.: _____ מס' מחברת: _____

שאלה 6

יהא $G=(V,E)$ גרף מישורי פשוט ותהא נתונה חלוקה של V ל- m קבוצות זרות בזוגות של צמתים $V = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ לכל $1 \leq i < j \leq m$, כאשר $|S_i| = 3$ לכל i . הוכחי שיש פונקציה $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 18\}$ כך שלכל $i \neq j$, עבורם יש קשת שקצותיה ב- S_i וב- S_j , מתקיים $f(i) \neq f(j)$.

הוכחה:

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

לשימוש במקרה "חירום":

תשובה לשאלה: _____

תשובה:

הסבר:

תשובה לשאלה: _____

תשובה:

הסבר:

בהצלחה!