אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר א' תשמ"ז
4.3.87

# תורת הגרפים

## לתלמידי מתימטיקה שנים ב-ג

המורה: ד"ר נגה אלון

משך הבחינה: 3 שעות
מותר להשתמש בכל חומר עזר.
השתדל/י לא לכתוב יותר מעמוד אחד בפתרון לכל שאלה.
בבחינה 7 שאלות. ענה/י על כמה שתוכל/י.
ציון הבחינה יקבע כדלקמן:
[illegible] מן הציון לפי 5 תשובותיך הטובות ביותר.
[illegible] מן הציון לפי, 2 התשובות הנוספות.

### שאלה 1

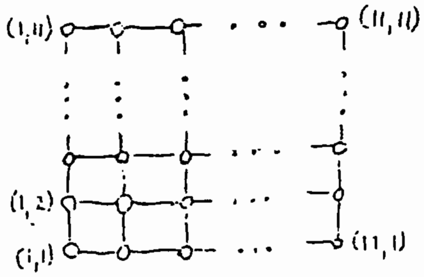
הוכח או הבא דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. לכל גרף פשוט $G=(V,E)$ קיימת צומת $v\in V$ כך ש- $\chi(G-v)<\chi(G)$.

ב. כל גרף פשוט 3 קשיר (בצמתים) הוא המילטוני.

### שאלה 2

יהא $G$ בגרף שצמתיו הן 121 נקודות הסריג הבאות: $\{(i,j) \mid 1\le i,j\le 11\}$ ובו הצומת $(i,j)$ מחוברת לצומת $(i',j')$ אם ורק אם: $|i-i'|+|j-j'|=1$ יש מעגל המילטוני? הוכח



### שאלה 3

האם קיים גרף מישורי פשוט בעל 10 צמתים שסדרת הדרגות שלו היא $6,6,5,5,5,5,5,5,4,4$? (הוכח שלא קיים כזה, או הבא דוגמא לגרף כזה).

### שאלה 4

יהיו $H_1, H_2, \ldots, H_k$ תת גרפים <u>שלמים</u> של הגרף השלם $K_n$ על $n$ צמתים, ונניח שלכל אחד מה- $H_i$ יש פחות מ- $n/2$ צמתים ושכל קשת של $K_n$ היא קשת של בדיוק שניים מן ה- $H_i$:

הוכח כי: $k \geq n$.

### שאלה 5

יהא $G$ גרף פשוט $k$ רגולרי בעל מספר אי זוגי של צמתים. מהו האינדקס הכרומטי $\chi'(G)$ ? הוכח !

### שאלה 6

יהא $G=(V,E)$ גרף דו צדדי על קבוצות הצמתים $X$ ו- $Y$, ונניח שלכל קשת $(x,y)\in E$ עבורה $x\in X$ ו- $y\in Y$ קיים $d(y)\leq d(x)$. הוכח כי יש ב- $G$ זיווג המרווה את כל צמתי $X$.

### שאלה 7

תהיינה $\pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$ ו- $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n$ שתי פרמוטציות של המספרים $1,2,\ldots,n$. הוכח שקיימת פונקציה $f$, $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \{\pm 1\}$ כך שלכל $i$, $1\leq i\leq n$ יתקיים:

$$|f(\pi_1)+f(\pi_2)+\ldots+f(\pi_i)|\leq 1$$

וגם

$$|f(\sigma_1)+f(\sigma_2)+\ldots+f(\sigma_i)|\leq 1 .$$

בהצלחה!!!