

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ח,
מועד הבחינה: 10.2.08
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

תעודת זהות: _____

מספר מחברת: _____

לשימוש הבודקים:

_____ 1

_____ 2

_____ 3

_____ 4

_____ סה"כ

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
לאתר של שלומי.

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ח,
מועד הבחינה: 10.2.08
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - ארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- הניקוד לכל סעיף, רשום בתחילת כל שאלה. סך הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימאלי האפשרי הוא 100.
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.

בהצלחה !

© כל הזכויות שמורות
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
לאתר של שלומי.

שאלה 1 (28 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

בכל יום חמישי דניאל מחליטה אם לצאת לבית קפה או לא. הסיכוי שתצא הוא 0.7. אם היא מחליטה ללכת לבית קפה, היא בוחרת באקראי בית קפה אחד, מתוך החמישה שנמצאים בשכונה שלה. החלטות בין שבועות ב"ת.

טליה יוצאת כל יום חמישי לבית קפה, והיא בוחרת באקראי מבין אותם 5 בתי קפה.

כל הסעיפים מתייחסים להגעה לבתי קפה ביום חמישי. ניתן להניח שהבחירות של דניאל וטליה ב"ת.

א. מהי תוחלת מספר השבועות (מתחילת השנה) עד שלראשונה דניאל תגיע ל- "כיף קפה"?

דניאל מגיע לבית קפה - "כיף קפה" קבוצה קבוצה
 $0.14 = \frac{1}{5} \cdot 0.7$. מספר פאזות 38 שפואל מגיע לקבוצה
 נכ מתבטל $G(0.14)$ ולכן פואל קבוצה תחלת
 $\frac{1}{0.14}$

ב. בשנה 52 שבועות. מה הסיכוי שבשנה דניאל תגיע 5 פעמים ל- "כיף קפה"?

מספר פאזות קבוצה תג'ע ל- "כיף קפה"
 מתבטל $B(52, 0.14)$. אם פהסתרות פאזות
 $(\binom{52}{5}) \cdot 0.14^5 \cdot (1-0.14)^{52-5}$

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.

ג. נסתכל על שלושת השבועות הראשונים בינואר. יהי X מספר השבועות מתוכם בהם טליה הגיעה ל-"כיף קפה", ו- Y מספר השבועות מתוכם בהם טליה הגיעה ל-"קפה בריבוע". כתבו ביטוי כללי ל- $P(X=k, Y=l)$, ורשמו מהם הערכים האפשריים ל- k, l .

גבלם שבוע פ"א משיצה ל"כ"ף קפה" קס"ב" 0.2, 0.2
 ל"קפה" גר'קוז" קס"ב" 0.2, 0.2
 מתק"ם אזור כ"ס $0 \leq k+l \leq 3$
 $P(X=k, Y=l) = \binom{3}{k} \binom{3-k}{l} \cdot 0.2^k \cdot 0.2^l \cdot 0.6^{3-k-l}$

פ"ע רות:

- ניתן גם לבטא, וזוהי שיטה קרה נ"ת.
- פ"ס"ל"ם צומח ל"ק"ז"ת פ"א"ק"ן, נ"ר, מ"ס"ל"ם" ש"פ"ת"ה ג"ש"ז"ל" פ"ל"ג.
- מהו מקדם המתאם בין X ו- Y שהוגדרו בסעיף הקודם?

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$X \sim B(3, 0.2), Y \sim B(3, 0.2) \implies V(X) = V(Y) = 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8$$

לצ"כ $X = \sum_{i=1}^3 X_i$ ו- $Y = \sum_{i=1}^3 Y_i$ כאינדיקטורים לדיקטורים קדתי פ"קפה ג"ש"ז"ל פ"א"ק"ן.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}\left(\sum X_i, \sum Y_i\right) = \sum \text{cov}(X_i, Y_i) = 3 \\ &= 3 \cdot \text{cov}(X_1, Y_1) = 3 \left(E(X_1 \cdot Y_1) - E(X_1) \cdot E(Y_1) \right) = \\ &= 3(0 - 0.2 \cdot 0.2) \end{aligned}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{-3 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{\sqrt{(3 \cdot 0.2 \cdot 0.8)^2}} = -\frac{1}{4}$$

- משת"ם ק"ש"י א"נ"ג"ב ש"ז"ב"ה פ"ס ל"ט"ל" ת"ל"ם.
- כ"ס ז"א"ת פ"מ"ש"מ"ם פ"ס ק"ש"י פ"ת"ל"ט"ת מ"ש"ז"ב"ה ז"ב"ה.

שאלה 2 (12 נקודות - כל סעיף 6 נקודות)

מספר הפעמים שסטודנט מוציא כסף מכספומט מתפלג לפי תהליך פואסון עם תוחלת של פעמיים בחודש. סטודנטים שונים ב"ת.

א. מה הסיכוי ש-150 סטודנטים, שנבחרו באקראי, הוציאו יחד, לפחות 325 פעמים כסף מכספומט במהלך חודש? (יש להגיע למספר סופי).

סכום λ 150 משתנים $(2) P$ מתפלג דקירה
 $N(150 \cdot 2, 150 \cdot 2)$ שנה $N(300, 300)$. λ P משפט הגדול
 פארוכ' נקרא דקירה הסתברות
 $1 - \Phi\left(\frac{325 - 300}{\sqrt{300}}\right) \approx 1 - \Phi(1.44) \approx 1 - 0.925 = 0.075$
 פארוכ': אם לזכור קראת תשובה מצ'קת יתר משתנים
 ג'ת'קון רציבות אם הושתים במונה 324.5 במקום 325.

ב. מה הסיכוי שלכל היותר 50 סטודנטים מתוך ה-150 לא הוציאו כסף מכספומט במחצית הראשונה של חודש אוקטובר? (יש להגיע למספר סופי).

מספר הפוזיות λ סאונט קמח'ית חוצב מתפלג
 $P(1)$. ההסתברות שפאל לא יוצא כסף פאל
 e^{-1} , מספר הפוזיות שפאל מוציא כסף קמח'ית
 פאל מתפלג $P(150, e^{-1})$ ודקירה $N(150 \cdot e^{-1}, 150 \cdot e^{-1})$
 שנה $N(55.18, 34.88)$. אם ההסתברות פאלקשת
 פאל דקירה
 $\Phi\left(\frac{50 - 55.18}{\sqrt{34.88}}\right) = \Phi(-0.877) = 1 - \Phi(0.877) = 1 - 0.81 = 0.19$
 פארוכ': אם לזכור קראת תשובה יתר מצ'קת
 משתנים ג'ת'קון רציבות אם הושתים במונה 50.5 במקום 50.

שאלה 3 (36 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

שני חברים לעבודה רוצים לשכור דירה יחד ומתלבטים בין כפר-סבא ונתניה. כחלק מההחלטה הם רוצים לבדוק זמני נסיעה לעבודה (בתל אביב) משתי הערים. במשך 4 שבועות (20 ימי עבודה) הם יוצאים באותה השעה, כל אחד מעיר אחרת ומתזמנים את זמן הנסיעה.

יהי X זמן הנסיעה (בשעות) מנתניה לתל אביב, ו-Y זמן הנסיעה (בשעות) מכפר-סבא לתל-אביב. נתון כי ההתפלגות אינה משתנה בימות השבוע, ימי שבוע ב"ת והצפיפות המשותפת הינה:

$$f(x,y) = 1 \quad 0.5 \leq x \leq 1.5 \quad 0.5 \leq y \leq 1.5$$

א. מה ההתפלגות השולית של X?

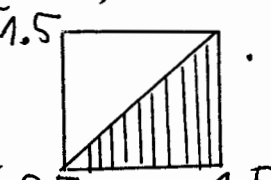
עקור כל $0.5 \leq X \leq 1.5$:

$$f_X(x) = \int_{0.5}^{1.5} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{0.5}^{1.5} 1 dy = 1$$

ב. מהי תוחלת וסטיית התקן של זמן הנסיעה המצטבר (במהלך 4 השבועות) של הנהג מנתניה?

תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות שפטל $20 \cdot \frac{0.5+1.5}{2} = 20$.
 קצתם פאי תלויה, שטח הסכום שווה לסכום הפונקציות $20 \cdot \frac{(1.5-0.5)^2}{12} = \frac{5}{3}$.
 סטיית התקן שווה ל $\sqrt{\frac{5}{3}}$

ג. מה הסיכוי שביום הראשון של התזמונים לנהג מנתניה ייקח יותר זמן, וביום שני של התזמונים לנהג מכפר סבא ייקח יותר זמן?

קצתם שמזקר ההתפלגות ב-3 מ'מ'ית רצ'פ' אלז הסכ'ו ס'ק'א
 ס'פ'ם קצ'וק אול'ט זמן ק'יום מס'ים פטל אכ'ס, מ'ס'יק'א
 ס'מ'ט'ר'יה קצ'ם י'וס יש ע'כ'ם אול'ז סכ'ו 0.5 ס'ק'א ע'ו
 י'ו'תר מ'ל'א'ח'ר, קצ'ם פ'א'י ת'ל'מ'ת ק'ין י'מ'ים ש'נ'ים, ה'פ'ס'ת'ק'ו'ת
 ה'מ'ק'ו'ק'ו'ת פ'ט'ל $0.5^2 = 0.25$. ה'פ'ס'ת'ק'ו'ת ש'ל'א'ז י'ק'ד י'ו'תר
 מ'ל'א'ח'ר ק'יום מס'ים פ'ט'ל ז'מ ת'ל'ק'ו'ת ע'ל ה'מ'ל'ש ס'ס'י'מ'ית
 מ'ל'ק' כ'ם ה'ר'ו'ע. 1.5  0.5 1.5

אכ'פ'ק' ס'ח'פ'ק' א'ל ה'פ'ס'ת'ק'ו'ת ה'ט'ו'ת
 ז'מ ע'ס-י'ז' ש'י'מ'ו'ש ס'י'נ'ל'ע'ר'ם,

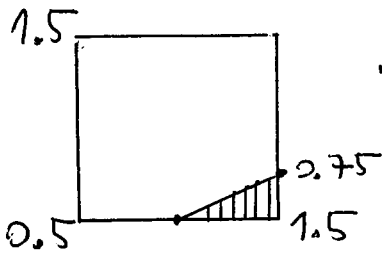
ד. מה הסיכוי שביום כלשהו לנהג מנתניה ייקח יותר מכפול זמן מאשר לנהג מכפר סבא ?

נשים את x ו- z הם לתי תלויים

$$P(X > 2Z) = \int_{0.5}^{1.5} f_Z(z) \cdot P(X > 2z) dz = \int_{0.5}^{1.5} (1.5 - 2z) dz = \dots = \frac{1}{16}$$

או קצת אחרת:

מבקר בטא המושל אמת ס'מנת'.



ה. נניח שהחברים מדברים בטלפון במהלך כל הנסיעה (עם דיבורית כמובן) עד הרגע שהראשון מגיע לעבודה ואז מפסיקים. מהי הצפיפות של זמן השיחה בטלפון ?

י' Z - עקב פ'תה

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(X > z, Z > z) \stackrel{\text{אי תלוי}}{=} 1 - P(X > z) \cdot P(Z > z) = 1 - (1.5 - z)^2$$

(עבור $0.5 \leq z \leq 1.5$)

$$f_Z(z) = (F_Z(z))' = 2(1.5 - z) = 3 - 2z$$

זאת ה'ע'פ'ות ע'ק'ר $0.5 \leq z \leq 1.5$.

ו. מהו החציון של זמן השיחה בטלפון ?

מ'ק'ר m כ'ק' ע'י

$$F_Z(m) = 1 - (1.5 - m)^2 = 0.5$$

$$m = 1.5 - \sqrt{0.5} \quad \text{א'פ' } (1.5 - m)^2 = 0.5$$

שאלה 4 (29 נקודות - סעיפים א-ג - 7 נקודות; סעיף ד - 8 נקודות)

הנסיין בב"ס מסוים מלמד שהתפלגות הציונים במבחן סוף השנה במתמטיקה, בקרב בנים ובנות, הינה נורמלית עם המאפיינים הבאים:

סטיית תקן	תוחלת	
7	80	בנות
10	77	בנים

ניתן להניח שאין תלות בין תלמידים. בשנה מסוימת יש בכיתה 20 בנים ו-10 בנות.

א. מה גבוה יותר אחוזון 95 של ציון הבנות או אחוזון 95 של ציון הבנים? (הראו את החישוב).

$$\phi\left(\frac{x-80}{7}\right) = 0.95 \implies \frac{x-80}{7} \approx 1.65 \quad \text{של הבנות!}$$

$$\implies x \approx 91.55$$

$$\phi\left(\frac{y-77}{10}\right) = 0.95 \implies \frac{y-77}{10} \approx 1.65 \quad \text{של הבנים!}$$

$$y \approx 93.5 \implies y > x$$

ב. מה הסיכוי שהציון של תלמיד שנבחר באקראי יהיה גבוה מ-78? (שימו לב שהתלמיד הנבחר יכול להיות בן או בת).

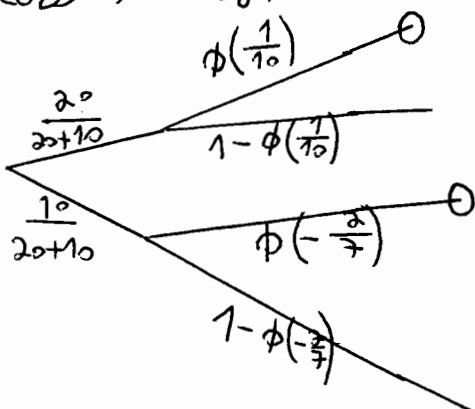
$$\frac{20}{20+10} \cdot \phi\left(\frac{78-77}{10}\right) + \frac{10}{20+10} \cdot \phi\left(\frac{78-80}{7}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \phi\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \phi\left(\frac{2}{7}\right)\right) = \dots$$

הסבר: הפתרון גומסת הפסתרות הפלמא.

הסתברות $\frac{20}{20+10}$ נזר בן ואל קלטא משנה
 קלטא הפלמא $N(77, 10^2)$ וקסתרות $\frac{10}{20+10}$

נזרה קת ואל קלטא משנה קלטא הפלמא $N(80, 7^2)$



מקק סכמ הפסתרות

של הפלמא סאומ סמנת

?. 0

עבודות

ג. מה הסיכוי שממוצע הציונים של הבנות יהיה גבוה ב-2 נקודות מממוצע הציונים של הבנים?

ממוצע הציונים של הבנות הוא 80 והתבטאת $N(80, \frac{7^2}{10})$
 וממוצע הציונים של הבנים הוא 77 והתבטאת $N(77, \frac{10^2}{20})$
 ההפרש של הממוצעים מתבטא $N(M, G^2)$
 כאשר $M = 80 - 77 = 3$
 $G^2 = \frac{7^2}{10} + \frac{10^2}{20}$
 ההסתברות (המקוקבת) היא $1 - \Phi\left(\frac{2-3}{6}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{7^2}{10} + \frac{10^2}{20}}}\right) = \dots$

ד. למועצת התלמידים הבית-ספרית יש לבחור 2 נציגים מהכיתה. מה הסיכוי שהנציגים יהיו עומרי ונועה אם:

a. הבחירה של 2 התלמידים נעשית באקראי מבין ה-30?

$$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29}$$

b. בוחרים באקראי בת מבין הבנות וכן מתוך הבנים?

$$\frac{\binom{1}{1} \binom{1}{1}}{\binom{20}{1} \binom{10}{1}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{10}$$

© כל הזכויות שמורות
 פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.
 אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ
 לאתר של שלומי.