מספר הקורס: 0509.2805.04
מועד א', סמסטר ב', תשס"ז,
מועד הבחינה: 18.7.07
משך הבחינה: 3 שעות

<u>מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסת חשמל)</u>

דר. ענת סאקוב

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ___________________

לשימוש הבודקים:

1 _______________

2 _______________

3 _______________

4 _______________

סה"כ __________________

מספר הקורס: 0509.2805.04
מועד א', סמסטר ב', תשס"ז,
מועד הבחינה: 18.7.07
משך הבחינה: 3 שעות

<u>מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסת חשמל)</u>

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
  - ארבעה דפי סיכום.
  - מחשבון.
  - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- מספר הנקודות האפשרי בבחינה הוא 105, אך הציון המקסימאלי הוא 100.
  מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. **המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.**

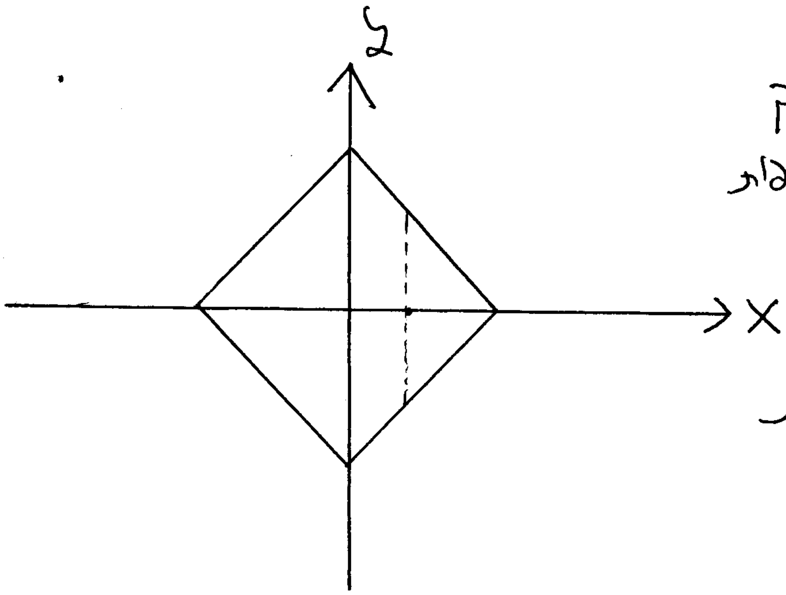
- **בכל השאלות, פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.**

בהצלחה !

שאלה 1 (27 נקודות. סעיפים א, ב ו- ד: 5 נקודות; סעיפים ג, ה: 6 נקודות)

מגרילים באקראי נקודה מהריבוע שקודקודיו ב- (1,0), (-1,0), (0,1) ו- (0,-1). מיקום הנקודה הוא (X,Y).

א. חשבו $P(X > 0.5)$.



ההתפלגות היא אחידה בתוך
ריבוע ששטחו 2. לכן יש צפיפות
0.5 לכל נקודה בתוך הריבוע.
$(X>0.5)$ מגדיר משולש ששטחו
$2\cdot\frac{1}{2}\cdot0.5\cdot0.5=\frac{1}{4}$. לכן ההסתברות
המבוקשת היא $\frac{1}{8}$.

ב. חשבו $P(X > Y)$.

$$p(X>Y)+p(X<Y)+p(X=Y)=1$$

$p(X=Y)=0$ ומשיקולי סימטריה $p(X>Y)=p(X<Y)$

לכן $p(X>Y)=0.5$.

או לפי פתרון גיאומטרי $(X>Y)$ מגדיר משולש ששטחו
חצי משטח הריבוע.

ג. מצאו תוחלת ושונות של X.

משיקולי סימטריה $E(X)=0$.

משיקולים גיאומטריים: עבור $-1\le x<0$: $F(x)=\frac{(x+1)^2}{2}$

לכן $f(x)=1+x$ עבור $-1\le x<0$.

עבור $0\le x\le 1$ $F(x)=1-\frac{(1-x)^2}{2}$ לכן

עבור $0\le x\le 1$ $f(x)=1-x$.

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}(1+x)x^2\,dx+\int_{0}^{1}(1-x)\cdot x^2\,dx=\dots=\frac{1}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$$

ד. האם X ו- Y בלתי-תלויים ? נמקו / הוכיחו.

למשל

$$P(X>0.5, Y>0.5)=0 \neq P(X>0.5)\cdot P(Y>0.5)$$

לכן הם תלויים

ה. האם X ו- Y מתואמים או בלתי-מתואמים ? נמקו / הוכיחו.

הם בלתי מתואמים אם $cov(x,y)=0$

$$cov(x,y) = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$$

מתקיים $E(x)=0$

נראה ש $E(x\cdot y)=0$ לכן $cov(x,y)=0$ ולכן הם בלתי מתואמים.

$$E(x\cdot y)=\int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} 0.5\cdot x\cdot y \, dy\, dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} 0.5\cdot x\cdot y \, dy\, dx =$$

$$= \dots = 0$$

שאלה 2 (30 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

בצרור מפתחות של מנהל מפעל 8 מפתחות, מהם 3 מפתחות לחדרו. אין סימון על המפתחות והם נראים זהים. בבוקר הוא מנסה מפתחות עד שיצליח. הבחירה במפתחות נעשית באקראי, אבל ללא בחירה של אותו מפתח פעמיים.

א. מהי תוחלת מספר הנסיונות עד שיצליח להיכנס לחדרו ?

יהי X- מספר הנסיונות

$p(X=1)=\frac{3}{8}$ $\quad p(X=2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$ $\quad p(X=3)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$

$p(X=4)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$ $\quad p(X=5)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$

$p(X=6)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$

וערכים אחרים לא יכולים להתקבל.

$E(X)=\sum p(X=k)\cdot k = \ldots$

ב. יהי I_4 משתנה מציין להצלחה עד (כולל) הנסיון הרביעי ו- I_2 משתנה מציין להצלחה עד (כולל) הנסיון השני. רשמו את ההתפלגות המשותפת שלהם.

$p(I_4=0, I_2=1)=0, \quad p(I_4=1, I_2=1)=p(I_2=1)=1-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$

$p(I_4=0, I_2=0)=p(I_4=0)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$

$p(I_4=1, I_2=0)=p(X=3)+p(X=4)$

ג. מהו מקדם המתאם בין I_4 ו- I_2 ?

$$\rho(I_2, I_4) = \frac{E(I_2 \cdot I_4) - E(I_2) \cdot E(I_4)}{\sqrt{V(I_2) \cdot V(I_4)}} =$$

$$= \frac{E(I_2) - E(I_2) \cdot E(I_4)}{\sqrt{V(I_2) \cdot V(I_4)}} = \frac{P(I_2=1) - P(I_2=1) \cdot P(I_4=1)}{\sqrt{P(I_4=1)(1-P(I_4=1)) \cdot P(I_2=1) \cdot (1-P(I_2=1))}} =$$

$$= \dots$$

ד. בשני הנסיונות הראשונים המנהל לא הצליח להיכנס לחדרו. מה הסיכוי שיצליח באחד משני הנסיונות הבאים?

מבוקש

$$P(I_4=1 | I_2=0) = \frac{P(I_4=1, I_2=0)}{P(I_2=0)} = \dots$$

או בדרך אחרת:

$$1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$$ כמשלים של

כשלונות במקומות 3 ו 4.

ה. באחד הבקרים הלכו לאיבוד שני מפתחות מהשמונה (לא ידוע מי). מה הסיכוי שיצליח לפתוח בנסיון הראשון ?

יהי X- מספר המפתחות שמתאימים לחדרו מבין המפתחות שהלכו לאיבוד.

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} \qquad P(X=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}$$

p - ההסתברות המבוקשת.

$$p = P(X=0) \cdot \frac{3-0}{8-2} + P(X=1) \cdot \frac{3-1}{8-2} + P(X=2) \cdot \frac{3-2}{8-2} =$$

$$= \dots = \frac{3}{8}$$

שאלה 3 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

נשים מהוות 56% מבני ה- 60 ומעלה. כל השאלה מתייחסת לקבוצת הגיל הזו. הסיכוי לחלות במחלה מסוימת בקרב גברים הוא 0.3, והוא גבוה פי 3 מהסיכוי של אישה לחלות באותה מחלה. מתוך מטרה ללמוד על גורמי הסיכון למחלה, בוחרים באקראי מדגם בגודל 200 מהאוכלוסייה של בני +60. בכדי לאבחן את המחלה עורכים לכל נדגם בדיקה שעלותה 100 ₪ לנבדק.

א. מה הסיכוי שלכל היותר יש 100 נשים במדגם ?

יהי X- מספר הנשים במדגם, $X \sim B(200, 0.56)$

אז בקירוב $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כאשר $\mu = 200 \cdot 0.56$

$\sigma^2 = 200 \cdot 0.56 \cdot 0.44$. $P(X \leq 100) \cong \Phi\left(\frac{100-\mu}{\sigma}\right) = \dots$

או אם מכירים תיקון רציפות אז יותר מדויק:

$\Phi\left(\frac{100.5-\mu}{\sigma}\right)$

ב. מהי תוחלת מספר האנשים החולים במדגם ?

$200 \cdot 0.56 \cdot 0.1 + 200 \cdot 0.44 \cdot 0.3 = \dots$

ג. מהי תוחלת מספר הנשים החולות במדגם ?

$200 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}1$

(תוחלת מספר הנשים במדגם כפול ההסתברות.
של אישה להיות חולה)

ד. מוצע לקחת מדגם בגודל 100 מקרב הגברים ומדגם בגודל 80 מקרב הנשים.

a. מהי תוחלת מספר האנשים החולים הכולל בשני המדגמים ?

$100 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}1$

b. מהי העלות של האבחונים בדגימה זו ובדגימה בסעיף ב' ? השוו את התוחלות והעלויות. מה מסקנתכם ?

בזאת העלות היא $100 \cdot 180$ ובזאת מסעיף
ב' $100 \cdot 200$ אך בזאת תוחלת מספר
החולים גבוהה יותר. בממוצע יתגלו יותר חולים.

שאלה 4 (24 נקודות – כל סעיף 6 נקודות)

במדינה מסוימת, למנת המשכל של בנים התפלגות נורמלית (בקירוב רב). האחוזון ה- 90 הוא 106.4, והאחוזון ה- 50 הוא 100. למנת המשכל של בנות אותה התפלגות. בוחרים מדגם של 100 בנות ומדגם של 75 בנים.

א. מהי סטיית התקן של ההתפלגות מנת המשכל בקרב הבנים?

M שווה לאחוזון ה- 50 שהוא כאן 100.

$$0.9 \simeq P(X \le 106.4) = \Phi\left(\frac{106.4-100}{\sigma}\right)$$

לכן $\Phi\left(\frac{6.4}{\sigma}\right) \simeq 0.9$ לכן $\frac{6.4}{\sigma} \simeq 1.28$ לכן $\sigma \simeq 5$.

ב. מה הסיכוי שההפרש בין הממוצע המדגמי של הבנים והממוצע המדגמי של הבנות גדול מ- 1 ?

תוחלת ההפרש היא אפס,

$$P(\hat{X}-\hat{Y}>1) \simeq 1-\Phi\left(\frac{1-0}{\sqrt{\frac{5^2}{75}+\frac{5^2}{100}}}\right) = 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right) =$$

$$= 1-\Phi(1.309) = 1-0.903$$

ג. מה הסיכוי שלארבע בנות בדיוק מתוך ה- 100 מנת משכל גבוהה מ- 110 ?

לגבי כל בת הסיכוי המבוקש a הוא בקירוב:

$$a = 1 - \phi\left(\frac{110-100}{5}\right) \cong 0.0228$$

ההסתברות המבוקשת היא:

$$\binom{100}{4} \cdot a^4 (1-a)^{96}$$

ד. במדינה אחרת, ההתפלגות מנת המשכל נורמלית, אך עם פרמטרים שונים. נלקח מדגם בגודל 200. הממוצע המדגמי וסטיית התקן המדגמית הם $\bar{X}, s$.

a. מצאו אומד נראות מקסימלית לסיכוי שלאדם מאוכלוסייה זו תהיה מנת משכל גבוהה מ- 110?

אומד נראות מקסימלי לתוחלת הוא $\bar{X}$.

אומד נראות מקסימלי לשונות הוא $\frac{199}{200} \cdot s^2$ ולכן

אומד נראות מקסימלי של סטיית התקן הוא $s \cdot \sqrt{\frac{199}{200}}$.

האומד הנראות המקסימלי הוא פונקציה של שני האומדים הקודמים. הוא שווה ל

$$1 - \phi\left(\frac{110-100}{\sqrt{\frac{200}{199}} \cdot s}\right)$$

b. מהו האומדן אם הממוצע מדגמי הוא 105 וסטיית התקן המדגמית 3?

$$1 - \phi\left(\frac{110-105}{\sqrt{\frac{200}{199}} \cdot 3}\right) = \dots$$