פתרון לבחינה מ 11.03.25

שאלה 1

התשובה היא א'.

$$F_X(1.8) = P(X \le 1.8) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.5$$

שאלה 2

התשובה היא ג'.

$$E(X^3) = \int f_X(x)x^3dx = \int_0^2 0.5x^3dx = 2$$

שאלה 3

התשובה היא ב' (שליש).

זהו משתנה שבסיכוי שני שליש מתפלג מעריכית עם פרמטר אחד ובסיכוי שליש מתפלג כמו מינוס משתנה מעריכי עם פרמטר אחד. התוחלת של משתנה מעריכי בעל פרמטר אחד היא אחד. לפי חישוב תוחלת שלמה, התוחלת היא $\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$.

הערות

התוחלת שווה ל $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3}e^x x dx + \int_0^\infty \frac{2}{3}e^{-x}xdx$. בכיתה חישבנו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x}xdx$. אין צורך לחזור על החישוב. כבר ידוע שהאינטגרל שווה לתוחלת של משתנה מעריכי. תוחלת זו היא מוכרת.

שאלה 4

התשובה היא ב'.

תוחלת סכום האינדיקטורים של המאורעות שווה לסכום התוחלות שלהם. הסכום הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2$$

שאלה 5

התשובה היא א'.

המשתנה Y_5 הוא משתנה מנוון שמקבל רק את הערך אפס. משתנה מנוון הוא בלתי מתואם ואף בלתי תלוי בכל משתנה אחר.

שאלה 6

התשובה היא ב'.

דרך ראשונה

מתקיים $V(Y_1 + Y_4) = V(Y_1) + V(Y_4) + 2Cov(Y_1, Y_4)$. לכן

$$Cov(Y_1,Y_4)=\frac{V(Y_1+Y_4)-V(Y_1)-V(Y_4)}{2}=\frac{8\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}-8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}-8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2}$$

דרך שניה

הסכום $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$ הוא קבוע ששווה לשמונה (כמספר המשתנים המקוריים).
קבוע לא תלוי ולכן לא מתואם עם שום משתנה. מתקיים

$$0=Cov(Y_1,Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)=Cov(Y_1,Y_1)+3Cov(Y_1,Y_4)=$$
$$=V(Y_1)+3Cov(Y_1,Y_4)=8\cdot 0.25\cdot 0.75+3Cov(Y_1,Y_4)$$

דרך שלישית

האינדיקטורים המייצגים קבלות של תוצאות שונות בהטלות שונות הם ב"ת.
השונות המשותפת שווה לסכום שמונה השונויות המשותפות של האינדיקטורים המייצגים קבלות של תוצאות שונות באותן הטלות. כל אחת מהן שווה ל $0.25\cdot 0.25-0$.

שאלה 7

התשובה היא ג'.
כדי שהסכום יהיה שווה לאפס, צריך ששני המשתנים יהיו שווים לאפס. לכן ההסתברות לא יכולה להיות גדולה מההסתברות שהראשון שווה לאפס. אם המשתנים הם העתק אחד של השני, אז ההסתברות שווה להסתברות שהראשון שווה לאפס. ההסתברות של משתנה פואסוני זה להיות שווה לאפס היא e^{-1}.

שאלה 8

התשובה היא ד'.
ההסתברות שהכדור שנבחר בשלב זה, לא נבחר קודם היא $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1999}$.
ביטוי זה שווה בקירוב ל e^{-2}.

שאלה 9

התשובה היא ד'.
יש סיפור מאחורי מה שקורה בכל שלב. אבל השלבים השונים הם ב"ת שווי התפלגות ובעלי מומנט רביעי שלא גדול מ 5^4.

הערה

אם פעם אחת היה נבחר כד עבור כל השלבים, המצב היה שונה.

שאלה 10

התשובה היא ג'.
אם מגיעים לשלב השלישי, אז תוחלת הפרס היא $\frac{1+4}{2}=2.5$. לכן מהשלב השני שווה לעבור לשלב השלישי במקרים שמקבלים בו 1 או 2. לכן אם נמצאים בשלב השני אז תוחלת הפרס היא $\frac{2}{4}\cdot 2.5+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=3$. לכן מהשלב הראשון לא כדאי לעבור לשלב השני כאשר מקבלים בו 4 (אדישים לגבי המעבר כאשר מקבלים 3). לכן תוחלת הפרס היא $\frac{3}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=3.25$.

הערות

כפי שגם נאמר בזמן הבחינה, הניסויים מבוצעים רק עם הגעה לשלב. אי אפשר לדעת לפני כן מה יתקבל בשלב. אם בשלב מסוים לא בוחרים לקבל את תוצאתו, אז כבר אי אפשר לחזור אחורה ולקבלה. אם למשל בניסוי הראשון קיבלנו תוצאת שתיים, ובחרנו להמשיך ובהמשך התקבלו פעמיים אחת. אז לא נוכל לקבל פרס של שתיים. כך לגודל הפרס אין התפלגות ששווה להתפלגות התוצאה המכסימלית המתקבלת בניסויים.

שאלה 11

כדי לבקר בשתי הנקודות האלה בשבעת השלבים הראשונים, חייבים לעשות צעד שמאלה ולאחריו ששה צעדים ימינה. ההסתברות לכך היא $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3}$.