

פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר ערן שמעיה מ 22/01/14

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ג	ג	א	ב	א	ד	א	ג	א	ב	א	א	ב	א

הסברים קצרים

שאלה 1

עם החזרה מאותו כד.

שאלה 2

בלי החזרה מאותו כד. המיקום לא משפיע על ההתפלגות. בכל מקום יש אותו סיכוי להוציא כל מספר. אין הבדל עקרוני בין המקום הראשון לבין מקומות אחרים (רק בהינתן התוצאה הראשונה, הסיכויים משתנים, אבל הסיכויים הלא מותנים הם שקלול של אפשרויות שונות של הפעם הראשונה, השקלול נותן את אותו סיכוי).

שאלה 3

כשהיא סיימה את תהליך קביעת הציונים בהתעמלות, היא החזירה את כל הפתקים והעבר נשכח.

שאלה 4

תוחלת של ממוצע משתנים שווי התפלגות. בגלל שהם שווי התפלגות, אז הם שווי תוחלת.

שאלה 5

$$V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(\sum X_i) = \frac{1}{n^2} n \cdot V(X_1)$$

1 המשתנים ב"ת ושווי התפלגות.

שאלה 6

לכל תלמיד יש אותו סיכוי להיות בתחום. תוחלת סכום משתני ברנולי אלה (או אידיקטורים) היא שווה.

שאלה 7

תחרות בין משתנים מעריכיים. נשקלל את ההסתברויות ש $(Y > X)$ עבור כל הערכים ש X שיכול להתקבל.

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} f_X(x) P(Y > x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

(האינטגרל האחרון, הוא אינטגרל על פונקציה צפיפות).

שאלה 8

התפלגות המינמום של שני משתנים מעריכיים ב"ת.

$$P(X \geq a, Y \geq a) \stackrel{\text{independent}}{=} P(X \geq a)P(Y \geq a) = e^{-\lambda a} e^{-\mu a} = e^{-(\lambda+\mu)a}$$

וזו ההסתברות שמשותנה $\exp(\lambda + \mu)$ יקבל ערך גדול מ a . זאת אומרת שלמינמום של שני המשתנים יש פונקציה הסתברות מצטברת של משותנה מעריכי ולכן הוא משותנה מעריכי.

שאלה 9

כאשר הוא יתחיל להיות משורת, יהיה בשרות עוד אחד אחר. התפלגות מעריכית היא חסרת זכרון. לכן בסיכוי מסוים יהיה משהו שגם זמן השרות הנותר שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר שליש ובסיכוי מסוים יהיה משהו שזמן השרות הנותר שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר שישיית. במקרה הראשון גנדלף יהיה אחרון שיסיים שרות בסיכוי חצי ובמקרה השני בסיכוי קטן מחצי. השקלול נותן ערך קטן מחצי.

שאלה 10

נסיונות ב"ת ושווי הסתברות

שאלה 11

$$P(X = k | X + Y = 9) = \frac{\binom{20}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} \binom{30}{9-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{9-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{30-(9-k)}}{\binom{50}{9} \left(\frac{1}{6}\right)^9 \left(\frac{5}{6}\right)^{50-9}} = \frac{\binom{20}{k} \binom{30}{9-k}}{\binom{50}{9}}$$

שאלה 12

כל תוצאה אי זוגית היא 1 בסיכוי שליש באופן ב"ת באחרות.

שאלה 13

$$P(1/Z^{1/5} \leq x) = P(1/Z \leq x^5) = P(Z \geq 1/x^5) = 1 - 1/x^5$$

שאלה 14

הצבה של 4 במשלים של פונקציה ההסתברות המצטברת של שאלה 13.

שאלה 15

עבור כל קבוע, חיובי, ההסתברות שהממוצע סוטה מהתוחלת ביותר מקבוע זה, שואפת לאפס כאשר מספר המשתנים שווי ההתפלגות והבלתי תלויים שואף לאין סוף. כאן התוחלת קטנה מ 2.

$$E(X) = \int_1^{\infty} \frac{5}{x^6} x dx < 2 \text{ ומתקיים } x > 1 \text{ עבור } \frac{5}{x^6} \text{ היא פונקציה הצפיפות היא}$$