פתרון מקוצר לבחינה של ריקי רוזנגרין ושירי אלון עירן
מ 14/6/11

שאלה 1

א. $E\left(e^{tx}\right)=\int_0^1 1\cdot e^{t(-\ln x)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x}\right)^t dx=$

$=\frac{1}{1-t}$

זאת פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה $\exp(1)$.
מכיוון שפונקציה יוצרת מומנטים מגדירה את ההתפלגות
אז $Y\sim\exp(1)$.

ב. יהי W - משתנה המודד את מספר מליוני השקלים לפרס.

$$E(W)=0.5E(X)+0.5E(Z)=0.5\frac{0+1}{2}+0.5\cdot 1=0.75$$

$$V(W)=E(W^2)-E^2(W)$$

$$E(W^2)=0.5\cdot E(X^2)+0.5E(Z^2)$$ כאשר

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$ כאשר

$$E(Z^2)=V(Z)+E^2(Z)=1+1=2$$!

$$E(W^2)=\frac{\frac{1}{3}+2}{2}=\frac{7}{6}$$ לכן

$$V(W)=\frac{7}{6}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{29}{48}$$

ג. יהי S - המשתנה המייצג את מספר מליוני השקלים ב 100 הפרסים.

$$E\left(\frac{S}{100}\right)=E(W)=0.75$$

$$V\left(\frac{S}{100}\right)=\frac{V(100W)}{100^2}=\frac{29}{100\cdot 48}$$

נשתמש במשפט הגבול המרכזי:

$$P(S>0.8) \cong 1-\phi\left(\frac{0.8-0.75}{\sqrt{\frac{29}{100\cdot 48}}}\right) \cong 1-\phi(0.64) \cong$$

$$\cong 1-0.7389$$

שאלה 2

א. יהי X- מספר המגיעים בין 10 ל 12.
יהי Z - מספר המגיעים לתור הקופה הראשונה.

$$P(Z=k \mid X=30) = \frac{P(Z=k,\ X-Z=30-k)}{P(Z=30)} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \frac{e^{-5}\cdot\frac{5^k}{k!}\cdot e^{-15}\cdot\frac{15^{30-k}}{(30-k)!}}{e^{-20}\cdot\frac{20^{30}}{30!}} = \binom{30}{k}\cdot\left(\frac{5}{20}\right)^k\cdot\left(\frac{15}{20}\right)^{30-k}$$

(* אין תלות בין קטעים זרים).

לכן ההתפלגות המותנה של Z היא $B\left(30, \frac{5}{20}\right)$
ואם נציב $k=10$ נקבל $\binom{30}{10}\cdot\left(\frac{5}{20}\right)^{10}\cdot\left(\frac{15}{20}\right)^{30-10}$

ב. הזמן עד הגעת הלקוח הראשון מתפלג מעריכית והזמן עד הגעת הלקוח החמישי מתפלג כסכום של 5 משתנים מקריים מעריכיים שווי התפלגות.
תוחלת הזמן עד הגעת הלקוח הראשון היא $\frac{1}{10}$ ועד הגעת הלקוח החמישי היא $\frac{5}{10}$.

ג. T_1, T_2 ~ זמני ההגעה לתור הקופה השניים

$$P(T\le t) = P(T_1\le t,\ T_2\le t) \overset{\text{א/ תלות}}{=} P(T_1\le t)\cdot P(T_2\le t)$$
$$= \left(1-e^{-10t}\right)\left(1-e^{-20t}\right)$$ עבור $t\ge 0$;

ד. לפי תכונת חוסר הזכרון יש לכל אחד מהלקוחות המאוחרים את אותה ההסתברות שהיא
$$e^{-\frac{10}{6}}\cdot e^{-\frac{20}{6}} = e^{-5}$$

ה. ההסתברות שיהיו בדיוק שני פרקי זמן ריקים היא

$$\binom{6}{2}\left(e^{-5}\right)^{2}\left(1-e^{-5}\right)^{4}$$

<u>הערה:</u>

ההסתברות שיהיו לפחות שני פרקי זמן ריקים היא

$$\sum_{k=2}^{6}\binom{6}{k}\left(e^{-5}\right)^{k}\left(1-e^{-5}\right)^{6-k}$$

שאלה 3

א. $1-P\left(\text{לא יחגגו}\right)=1-\left(\frac{364}{365}\right)^{40}$

ב. תוחלת הסכום של אינדיקטורים שווה ל

$$365\left[1-\left(\frac{364}{365}\right)^{40}\right]$$

(יש 365 אינדיקטורים שכל אחד מהם מייצג יום).

הערה:
מספר הימים שבהם חוגגים אינו מתפלג בינומית: יש
תלות בין ימים שונים.

ג. יהי X היום הראשון שבו יחגגו יום הולדת.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{365}P(X=k)\cdot k=\sum_{k=1}^{365}\left[P(X\geq k)-P(X\geq k+1)\right]k=$$

$$=\sum_{k=1}^{365}\left[\left(\frac{366-k}{365}\right)^{40}-\left(\frac{366-(k+1)}{365}\right)^{40}\right]\cdot k=\dots$$

הערה:
יש תלות בין המאורעות שבימים שונים יחגגו יום הולדת,
לכן התפלגות מספר הימים עד שיחגגו אינה גיאומטרית.

שאלה 4

א. $1=\int_0^\infty\int_0^x c\cdot e^{-\lambda x}\,dy\,dx = c\int_0^\infty x\cdot e^{-\lambda x}\,dx =$

$\overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} c\left[-x\cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + c\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\,dx \overset{*}{=} \frac{c}{\lambda^2}$

(* האינטגרל האחרון הוא $\frac{1}{\lambda^2}$ כפול אינטגרל של פונקצית צפיפות של משתנה $exp(\lambda)$.)

לכן $c=\lambda^2$

עבור $0\le x$:

$f_X(x)=\int_0^x f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^x \lambda^2\cdot e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x\cdot e^{-\lambda x}$

עבור $0\le y$:

$f_Y(y)=\int_y^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_y^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dx =$

$=\left[-\lambda\cdot e^{-\lambda x}\right]_y^\infty=\lambda\cdot e^{-\lambda y}\Longrightarrow Y\sim exp(\lambda)$

ב. בהינתן $(X=x)$: $Y\sim U(0,x)$ (לכל נקודה אפשרית יש את אותה צפיפות) המשערך האופטימלי הוא התוחלת המותנה שהיא $\frac{x}{2}$.

ג. הם תלויים. מתקיים למשל $P(Y>7)\neq 0=P(Y>7\,|\,X<2)$

שלומי