

מספר ת"ז: \_\_\_\_\_

מספר נבחן: \_\_\_\_\_

**הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי**

סמסטר א' תשע"א,

אילה משיח-יעקבי

1. ענו על 15 השאלות הבאות. יש לסמן רק תשובה אחת.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סך הכל : 105 נקודות.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במתברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. את כל החישובים יש לבצע במתברת.
6. יש לסמן את התשובות בדפי השאלון ולא במתברת.
7. בהצלחה.

מספר תשובות נכונות: \_\_\_\_\_

מספר תשובות שגויות: \_\_\_\_\_

ציון: \_\_\_\_\_

© כל הזכויות שמורות  
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ  
לאתר של שלומי.

שאלה 1

בוועידה בינלאומית יש 8 נציגים סביב שולחן עגול: ארה"ב, רוסיה, אנגליה, צרפת, אוסטרליה, סין, יפן והודו. נציג ארה"ב חייב לשבת ליד נציג רוסיה. כל שאר המקומות מקריים.

מה ההסתברות כי נציג סין יישב ליד נציג רוסיה או לצד נציג הודו.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{2 \cdot 5!}{2 \cdot 6!} + \frac{2! \cdot 2! \cdot 5!}{2 \cdot 6!} - \frac{2 \cdot 4!}{2 \cdot 6!}$$

(א)  $\frac{1}{2}$

(ב)  $\frac{7}{15}$

(ג)  $\frac{17}{42}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 2

בלוח יש  $n$  שורות ו- $n$  טורים (ובסה"כ  $n^2$  משבצות). בוחרים  $n$  משבצות באופן מקרי. מה ההסתברות כי תבחר משבצת אחת בכל שורה ואחת בכל עמודה.

(א)  $\frac{n}{\binom{n^2}{n}}$

(ב)  $\frac{1}{n}$

(ג)  $\frac{n!}{\binom{n^2}{n}}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 3

אדם בוחר באופן מקרי לבקר באחת משלוש ערים A, B, C. ההסתברות לגשם ב-A היא  $\frac{1}{3}$ , לגשם ב-B היא  $\frac{1}{4}$  ולגשם ב-C היא  $\frac{1}{6}$ . חשב את ההסתברות כי ביקר בעיר C בהינתן כי נקלע לגשם.

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}$$

(א)  $\frac{2}{9}$

(ב)  $\frac{1}{4}$

(ג)  $\frac{1}{18}$

(ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 4

מבצעים סדרה של  $n$  הטלות בלתי תלויות של מטבע הוגן. יהי  $X$  מספר העצים שהתקבלו.

בשימוש באי-שוויון צ'בישב, ה- $n$  המינימלי עבורו מתקיים כי  $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{16}$  הוא:

$$n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{16 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

(א) 400

(ב) 20

(ג) 200

(ד) אף אחד מהג"ל.

שאלה 5

בהמשך לשאלה 4, ה- $n$  המינימלי עבורו מתקיים בקירוב כי  $P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{16}$

$$\Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) \geq \frac{15}{16}$$

לפי משפט הגבול המרכזי הוא:

(א) נמצא בין 85 ל-90.

(ב) גדול מ-100.

(ג) לא ניתן להשתמש במשפט הגבול המרכזי.

(ד) אף אחד מהג"ל.

$$\Rightarrow \Phi(0.2\sqrt{n}) \geq \frac{31}{32}$$

שאלה 6

הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  נתונה ע"י

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו  $P(X+Y < 1)$ .

(א) קטן מ- $\frac{1}{2}$  אך גדול מ- $\frac{1}{4}$ .

(ב)  $\frac{1}{2}$ .

(ג) גדול מ- $\frac{1}{2}$ .

(ד) אף אחד מהג"ל.

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dx = 1 \quad ; \quad 0 < x \leq 1$$

לכן התפלגות  $X$  היא אחידה.

$$P(2X < 1) = 0.5$$

אך יתכן  $(Y \leq X)$  ולכן אם  $0.5 < X < 0.6$

אז גם  $(X+Y < 1)$  חולית.

© כל הזכויות שמורות

פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.

אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ

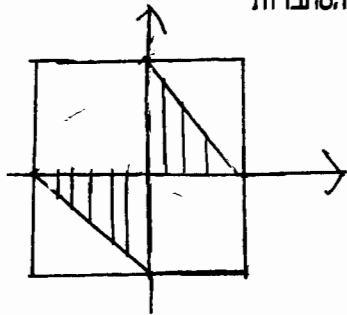
לאתר של שלומי.

שאלה 7

בהמשך לשאלה 6, מהו ה- $\rho(X, Y)$ ?  
 ככל ש- $X$  צומד, היתירות (האוטו-קורלציה) של  $X$  צומד. אלק אין קשר לטובי  
 (א) 0  
 (ב) חיובי אך קטן מ-1  
 (ג) שלילי  
 (ד) אף אחד מהנ"ל.

שאלה 8

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בלתי תלויים ומפולגים אחיד בקטע  $[-1, 1]$ . ההסתברות



היא:  $P(\{|X+Y| < 1\} \cap \{|X-Y| \leq 1\} | XY > 0)$

- (א) 0.5  
 (ב) 0.25  
 (ג) 0.21  
 (ד) אף אחד מהנ"ל.
- חסקו של פסל (התקוקו)  
 מולק של (הנכונים שקרם)  
 פסל מנצח.

שאלה 9

דון ז'ואן כתב מכתבים ל-20 נשים. מרב בלבול הוא הכניס את המכתבים למעטפות הממוענות באופן

אקראי. נסמן ע"י  $X$  את מספר הנשים שקיבלו את המכתב שיועד להן.

התוחלת  $E[X]$  היא:

- (א) 1  
 (ב) 1.5  
 (ג) 1.25  
 (ד) אף אחד מהנ"ל.
- כל אישה קדמה מכתב נכון קטן  
 $\frac{1}{20}$  יש סכום של 20 אינדיקטורים שלם  
 אחר מרמז יש תוחלת  $\frac{1}{20}$ .

שאלה 10

בהמשך לשאלה 9, חשב את  $Var[X]$ .

- (א) 2.5  
 (ב) 1  
 (ג) 1.7  
 (ד) אף אחד מהנ"ל.
- לכל  $1 \leq i \leq 20$ :  $V(X_i) = \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20}$   
 $Cov(X_i, X_j) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}$

$$V(X) = \sum V(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) =$$

$$= 20 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} + 2 \cdot \binom{20}{2} \left( \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \right)$$

שאלה 11

יהי X משתנה מקרי פואסוני עם פרמטר  $\lambda = 10$ .

יהי Z משתנה מקרי בלתי תלוי ב-X עם ההתפלגות  $P(Z = 0.9) = 0.2 = 1 - P(Z = 0.6)$ .

יהי Y משתנה מקרי נוסף כך ש-  $Y | (X = x, Z = z) \sim \text{Bin}(x, z)$ .

המשתנה המקרי  $Y | Z = 0.9$  מפולג

(א) גיאומטרי.

(ב) פואסוני.

(ג) בינומי.

(ד) אף אחד מהג"ל.

לפני ביצוע של משתנה פואסוני מתקיים משתנה

$$P(Y=z) = \sum_{x=z}^{\infty} e^{-10} \frac{10^x}{x!} \binom{x}{z} \cdot 0.9^z \cdot 0.1^{x-z} =$$

$$= \frac{e^{-10} \cdot 10^z \cdot 0.9^z}{z!} \sum_{x=z}^{\infty} \frac{0.1^{x-z} \cdot 10^{x-z}}{(x-z)!} = \frac{e^{-10} \cdot 9^z}{z!} \cdot e^1 = \frac{e^{-9} \cdot 9^z}{z!}$$

שאלה 12

בהמשך לשאלה 11, חשב את  $\text{Var}[Y]$  (כאשר לא נתונה ההנחה כי  $Z = 0.9$ ).

(א) 6.

(ב) 6.6.

(ג) 8.04.

(ד) אף אחד מהג"ל.

נתן פתרון סוגי ממוצעים באפשרות:

$$E^2(Y) = (0.2 \cdot 9 + 0.8 \cdot 6)^2$$

$$E(Y^2) = 0.2(9+9^2) + 0.8(6+6^2)$$

הכל אחר משי משתנה  $W$  במקרים של  $Z$  הפתאום קצת שלכם

$$E(W^2) = V(W) + E^2(W)$$

שאלה 13

נתונים 2 כדים.

בכד א' 2 כדורים שחורים ו-8 כדורים לבנים.

בכד ב' 7 כדורים שחורים ו-8 כדורים לבנים.

בוחרים באקראי כד, ואז מוציאים ממנו באקראי 2 כדורים עם החזרה.

נסמן ע"י  $X_i$  את מספר הכדורים השחורים בהוצאה ה- $i$  (זהו אינדיקטור המקבל את הערכים 1 או 0).

מהו מקדם המתאם בין  $X_1$  ל-  $X_2$ .

(א) 0.0625.

(ב) 0.

(ג) 0.253.

(ד) אף אחד מהג"ל.

$X_1$  ו-  $X_2$  הם כל אחד אלוניקטורים

הכל: הסתברות  $\frac{1}{3}$

$$0.5 \cdot \frac{2}{10} + 0.5 \cdot \frac{7}{15} = \frac{1}{3}$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{7}{15} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.0177$$

$$r(X_1, X_2) = \frac{0.0177}{\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}}}$$

שאלה 14

$X$  מפולג פואסונית עם פרמטר  $\lambda = 1$ . מהו  $E(|X-1|)$

$$E(|X-1|) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) (k-1) + P(X=0) \cdot 1 = \frac{2}{e} \quad (א)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) \cdot k - \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) + P(X=0) \quad (ב)$$

$$= E(X) - \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) + 2 \cdot P(X=0) = \frac{1}{e} \quad (ג)$$

$$= 1 - 1 + \frac{2}{e} \quad (ד) \text{ אף אחד מהב"ל.}$$

שאלה 15

שני חוקרים (אייל וסיגל) רצו לאמוד את תוחלת הזמן, בדקות, שנערות בנות עשרה מקדישות לשיחה בטלפון מדי יום (ניתן להניח שזמן השיחה מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן ידועה).

כל אחד מהחוקרים אסף נתונים על 20 נערות שונות.

סיגל קבלה את רווח הסמך: [85.32, 94.68]

אייל קיבל את רווח הסמך: [85.76, 93.24]

איזו מהטענות הבאות נכונה:

(א) הממוצע המדגמי שקבלה סיגל גבוה יותר מזה של אייל.

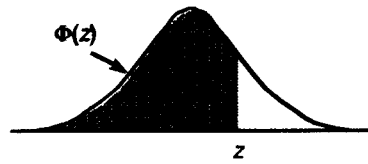
(ב) הממוצע המדגמי שקבל אייל גבוה יותר

(ג) אין מספיק נתונים להחליט מי קבל ממוצע מדגמי גבוה יותר.

(ד) אף אחד מהב"ל.

© כל הזכויות שמורות  
פתרונות אלה נכתבו על-ידי שלומי.  
אין להעתיק אותם או להפיץ אותם מחוץ  
לאתר של שלומי.

טבלה 1. טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9946	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995