

שאלה

שאלות

1. עזרה בברור עם התחלת שבוטא עיקר המוצע.
 כעת ננסה אלאמוז את מ'צד הפיזור של משתנים.
 רעיון שיכול לעשות קהל פול אלאמוז את הפיזור
 עם-צ' חישק ממוצע הסטיות מהתחלת. $E(X - E(X))$
 אלה רעיון זה לא מתאים. הסטיות כפלי מעלה
 תמיד יקצנו את הסטיות כלפי מטה, לפי אינטואיות
 התחלת מתק"ם $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$
 ומגיד נקרא 0, אין שום אינצקציה לפיזור.
 צריך שנאת מתאמה להתקרה עם קציה זו פול
 לפיכך עם ממוצע הערכים המוחלטים של הסטיה
 מהתחלת, לפי רעיון טאד, ככל שהסטיות לבולות
 יותר, ממוצע הערכים המוחלטים לבול יותר.
 אלה נפוצ לעזר עם בונקציה אחת של המשתנים
 שבוטא ממוצע רדוע' הסטיה מהתחלת, זו פול השוואת
 מסתנים אלת השוואת כ $V(X)$ או $Var(X)$.
 מתק"ם $V(X) = E((X - E(X))^2)$. זו פול הלצית השוואת.

? $V(X)$ נתון, $X \sim U[1,6]$ קורה משתנה X למשל

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \frac{1}{6}(1-3.5)^2 + \frac{1}{6}(2-3.5)^2 + \frac{1}{6}(3-3.5)^2 + \frac{1}{6}(4-3.5)^2 + \frac{1}{6}(5-3.5)^2 + \frac{1}{6}(6-3.5)^2 = \frac{35}{12}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2E(X) \cdot X + E^2(X)\right) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

נתון משתנה $U[1,6]$ עם פונקציית

כוח $f(x) = \frac{1}{6}$ $x \in [1,6]$ ו-0 אחרת

$$E(X) = 3.5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$X \sim U[a, b] \text{ ככל הנראה } E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ ו-} V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

3
 פונקציה עמוסות השונות של משתנה אלוז נמצאת
 בקורס נכדז ופלא עקריאל רואה.
שונות של משתנה אינדיקטור

$$P(X=0) = q = 1-p, \quad P(X=1) = p$$

מתק"ס $E(X) = p$, אם פגזחת השונות מתק"ס

$$V(X) = p(1-p)^2 + q(p-p)^2 = p \cdot q^2 + q \cdot p^2 = pq(q+p) = pq$$

נחזק את השונות גם אם פנאסתא עחילאק שונות:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = [p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2] - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

שונות של פונקציה עמוסות

מקרה של פונקציה טאן e $E(ax+b) = aE(X) + b$

$$V(ax+b) = E([ax+b - E(ax+b)]^2) = E([ax+b - E(ax) - b]^2) = E([ax - E(ax)]^2) = E([a(x - E(x))]^2) = a^2 E[(x - E(x))^2] = a^2 V(x)$$

פונקציה טאן e $V(ax+b) = a^2 V(x)$

פ"ק נרמל מ/סו דע מ/ויע

$$V(X+Y) = E((X+Y - E(X+Y))^2) = E(((X-E(X)) + (Y-E(Y)))^2) =$$

$$= E((X-E(X))^2) + E((Y-E(Y))^2) + 2 \cdot E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$

$$Cov(X, Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) \quad \text{ר'סד}$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) \quad \text{ד'קד}$$

("מאמענט מ/ויע" דע פער פד $Cov(X, Y)$ ד' ל'קד

מאמענט מ/ויע פאר פד ל'קד

	0	1	3	
1	0,1	0,2	0	0,3
2	0	0,3	0,4	0,7
	0,1	0,5	0,4	

$$E(X) = 0,3 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 = 1,7$$

$$E(Y) = 0,1 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,4 \cdot 3 = 1,7$$

$$Cov(X, Y) = E(((X-E(X))(Y-E(Y)))) =$$

$$= 0,1(1-1,7)(0-1,7) + 0,2(1-1,7)(1-1,7) +$$

$$+ 0,3(2-1,7)(1-1,7) + 0,4(2-1,7)(3-1,7)$$

נוסחה כללית של ערך התא

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = \\ &= E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(E(X) \cdot Y) + E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

הוכחה

תכונות של ערך התא

אם $P(X=a) = 1$ נ"א X שיתנה מנוון. נ"א

$\text{Cov}(X, Y) = 0$ אם X ו- Y מתק"ם

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) =$$

$$= E(aY) - a \cdot E(Y) = a \cdot E(Y) - a \cdot E(Y) = 0$$

הוכחה

$$\text{Cov}(X, X) = V(X)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= E(X \cdot X) - E(X) \cdot E(X) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) = V(X) \end{aligned}$$

הוכחה

$Cov(X, Y) = 0$ שלם " כל המשתנים הם X, Y נ"ל

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \quad \text{הכנסה}$$

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad \text{כל המשתנים}$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y p(X=x, Y=y) \cdot xy =$$

$$\sum_x \sum_y p(X=x) \cdot p(Y=y) \cdot xy =$$

$$= \sum_x p(X=x) \cdot x \sum_y p(Y=y) \cdot y = \sum_x p(X=x) \cdot x \cdot E(Y) =$$

$$= E(Y) \cdot E(X)$$

הכנסות נוספות של המשתנים

$$(1) V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \cdot \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j)$$

$$(2) Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$(3) Cov\left(\sum X_i, \sum Y_j\right) = \sum_i \sum_j Cov(X_i, Y_j)$$

$$Cov(X+Y, Z+W) = Cov(X, Z) + Cov(X, W) +$$

$$Cov(Y, Z) + Cov(Y, W) \quad \text{לנד}$$

$$(4) Cov(aX+b, cY+d) = ac Cov(X, Y)$$

אחת היתכונות פיתח ρ של שיתוף X, Y הם

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{ג'ר של}$$

נראה שהכיוון הפני אלא נכון תמי'3. נראה של

$\text{Cov}(X, Y) = 0$ אלא דהכרח של הפיתוחים הם דת.

נראה שאת ע'3-3 צוטט.

$$P(X=0, Y=0) = P(X=-1, Y=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 \quad \text{מתק'ים}$$

$$E(X) \cdot E(Y) = 0 \quad \text{כ'פ}$$

$$E(XY) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0 \quad \text{כ'פ}$$

$$P(Y=0 | X=1) = 0 \neq \frac{1}{3} = P(Y=0) \quad \text{כ'ל}$$

כ'פ בהתפלגות פחותה ל Y אינה נבה

להתפלגות המקורית שלו ולכן יש תלות.

אפשר אומר שאת זה דברק אחרת:

$$P(X=0, Y=1) = 0 \neq P(X=0) \cdot P(Y=1)$$

השיתוף הם תלוי'ים, אלא אין משותף ע'3 כ'ל'ית

או יהיה כ'ל'ית ל שיתוף סלר האחר עולה.

$\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_1, X_2)$ ⁹ לכל i, j מתקיים
 (כלומר כל המשתנים הם זהים) אולם ההתפלגות
 משתנה.

$$2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 2 \binom{h}{2} \text{Cov}(X_1, X_2) = \text{מתקיים}$$

$$= h(h-1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) =$$

$$= P(X_1=1, X_2=1) - P(X_1=1) \cdot P(X_2=1) =$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$V(X) = h \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} + h(h-1) \cdot \frac{a}{a+b} \left(\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a}{a+b} \right)$$

מתקיים

$$V(X) = h \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \left[1 - \frac{h-1}{a+b-1} \right]$$

מתקיים

שים לב שלם $h=1$, כל המשתנים אינדיקטורים.
 בכל המשתנים אם סכום אינדיקטורים קטב משתנה
 למקרה הכללי, כ' האן יש השפעה מרמנת א כל
 אינדיקטור אם א אינדיקטור אחר. אם כנס אחר יש

דבריהם לא קטן בהכרח, אולם הם אכן

דוגמת פונקציה הולגראם

עבור n אנשים מוצג מכתב מסוים, אך
 הפונקציה שמוצגת אף היא פונקציה הולגראם ופני אולם
 אולם עמדה טיפוסית, כך שכל אחד מהם הוא הולגראם
 הוא אף פונקציה.

X - מספר האנשים שמקלים את המכתב שמוצג להם.

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

כאשר X_i הוא אינדיקטור לכך

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) =$$

$$= n \cdot V(X_1) + n(n-1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)$$

(במשתנה עם הולגראם ופני הולגראם מואחדת)

$$V(X_1) = P(X_1=1) \cdot P(X_1=0) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n(n-1) \left(\frac{1}{n^2(n-1)}\right) = 1$$

מספרים $\frac{35}{36}$ 10 בעלות ג'ת א קודם הק'ב .
מה' אלוט מסר ה'ב' 6,6 ?

בתרון

X - מסר ה'ב' , X_i - א'צ'ק'ט א'כ'ק א'מ'ק'א'ת
 $i, i+1$ ה'ב' ה'ב' . 'ש' א'צ'ק'ט א'מ'ק'א'ת א'מ'ק'א'ת

$$E(X_i) = \frac{1}{36}, \quad V(X_i) = \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36} \quad ; \quad i=1, \dots, 9$$

$$\sum V(X_i) = 9 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36}$$

ה'ב' ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת , כ' א' א'מ'ק'א'ת
ה'ב' ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת .

$$\text{Cov}(X_i, X_{i+1}) = E(X_i \cdot X_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{6^3} - \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^2}$$

$$V(X) = 9 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36} + 2 \cdot 8 \left(\frac{1}{6^3} - \frac{1}{6^4} \right)$$

ה'ב' ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת , א'מ'ק'א'ת
א'מ'ק'א'ת ה'ב' ה'ב' (ה'ב') , א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת

ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת

ה'ב' א'מ'ק'א'ת ה'ב' א'מ'ק'א'ת . 'ש' א'מ'ק'א'ת א'מ'ק'א'ת א'מ'ק'א'ת

תשובה: $\frac{1}{6^3}$ כל האלמנטים הם קבועים.
 תשובה: כל אלמנטים הם קבועים.
 תשובה: כל אלמנטים הם קבועים.

תשובה

$X = \sum_{i=1}^8 X_i$
 $E(X) = E(\sum_{i=1}^8 X_i) = \sum_{i=1}^8 E(X_i) = 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^8 X_i\right) = \sum_{i=1}^8 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j)$

$V(X_i) = V(X_1)$ לכל i מתקיים

$V(X_1) = \frac{1}{6^3} \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)$

$\sum V(X_i) = 8 \cdot \frac{1}{6^3} \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)$ כל

כל אלמנטים הם קבועים.
 תשובה: כל אלמנטים הם קבועים.
 תשובה: כל אלמנטים הם קבועים.

ע' 7 זאגט א גלעם ע'ס פון פילקאל
 משותפת: כל זאגט א גלעם יורי רגע'ה,
 ע' 7 רגע'ה.

ע' 6 זאגט א גלעם ע'ס פון פילקאל
 משותפת: כל זאגט א גלעם יורי חש'ה,
 ע' 6 חש'ה.

מתק"ם

$V(X) = 8 \cdot V(X_1) + 7 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + 6 \cdot \text{Cov}(X_1, X_3)$
 בקשר בין X_1 א X_2 פון א'ים. א/א מתחיל,
 א/א X_2 א/א יכול אמת.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = \\ &= 0 - \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{6^3} \end{aligned}$$

בקשר בין X_1 א X_3 פון א'ים. א/א מתחיל,
 א/א יש ברר פילקאל קלעב פילקאל א X_3 , א/א
 מקירק א/א X_3 אמת.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_3) &= E(X_1 \cdot X_3) - E(X_1) \cdot E(X_3) = \\ &= \frac{1}{6^5} - \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{6^3} \end{aligned}$$

$X \sim P(\lambda)$ זשען E זאלע

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E^2(X) = \lambda^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k^2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} k(k-1) \right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} k \right]$$

$$= \left[\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \right] + \lambda = \left[\lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^l}{l!} \right] + \lambda$$

$E(X) = \lambda$

זשען E זאלע פאר $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$

$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad \text{זשען פאר}$$

סוגיה

'פ'ו' x_1, x_2 של משתנים מקרניים ק"ת ש"ו התבטא.

$$E(2x_1) = 2E(x_1) \quad \text{מק"ת}$$

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2) = 2 \cdot E(x_1)$$

$$V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2) = 2V(x_1)$$

$$V(2x_1) = \underset{\substack{\text{ק"ת} \\ \text{משתנים}}}{2^2} V(x_1) = 4V(x_1)$$

צורה אחרת אכיזתם על זה:

$$\begin{aligned} V(2x_1) &= V(x_1 + x_1) = V(x_1) + V(x_1) + 2 \cdot \text{Cov}(x_1, x_1) = \\ &= V(x_1) + V(x_1) + 2V(x_1) \end{aligned}$$

x_1 ! x_2 לא משתנים, אלא x_1 משתנים עם x_1 .

הצורה לזר' נוסחת השונות של משתנה $G(x)$

$$\text{קלט } e \quad V(x) = \frac{q}{p} \quad \text{כאשר } p \text{ זכר } q \text{ אי}$$

q קטן והשונות יורדת, כזו מנטאל את הפעולה

שנזל הס'כ"ו אקול את ההבליחה קלז מוקצם, האר

$1 \rightarrow p$ אל הס'כ"ו שקול את ההבליחה מ'כ' בהתעורר

קניסו היטלן, שטו 1 פון וואס שטאט לאס
 • $(q \rightarrow 0)$

כאט $q \rightarrow 0$ הייבט זיך אן און אומבאקאנט
 פון ענינים וק'ס.

inside