<u>החוק החזק</u>

שלומי

יש משתנים שלהם יש תוחלת. אם יש למשתנה תוחלת היא יכולה להיות סופית או אינסופית. לסדרה של משתנים יש סדרה של ממוצעים מצטברים עד כל נקודת זמן. עבור כל נקודת זמן יש ממוצע מצטבר עד אותה נקודה. החוק החלש של המספרים הגדולים והחוק החזק של המספרים הגדולים הם שתי תכונות שונות המייצגות צורות שונות של התכנסויות של סדרת ממוצעים מצטברים לסדרת תוחלות מצטברות. לגבי כל סדרת משתנים מקריים, כל אחד מהחוקים חל עליה או שהוא לא חל עליה.
נאפיין סוגים של סדרות של משתנים שעליהם חוק חל. כמו כן נדון בסדרות ספיציפיות.

<u>החוק החזק של המספרים הגדולים</u>

אם החוק החלש חל על סדרת משתנים מקריים אז אם מסתכלים על נקודת זמן מתקדמת אז בהסתברות מספיק גבוהה באותה נקודה הממוצע קרוב מספיק לתוחלת. אבל זה לא אומר שהחל מאותה נקודה בהסתברות מספיק גבוהה נקבל תמיד קרבה לתוחלת. הדבר דומה במידה מסוימת להבדל בין התכנסות סדרה לבין התכנסות טור. יכול להיות שהאיבר הכללי שואף לאפס אך זנב הטור לא שואף לאפס. יתכן מצב שבכל נקודה נהיה בהסתברות גדולה מספיק קרובים לתוחלת, אך בזמנים אקראים יהיו סטיות גדולות שאחר-כך יעלמו.

<u>ניסוח החוק החזק</u>

על סדרה של משתנים מקריים חל החוק החזק אם עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left|\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}-\frac{\sum_{i=1}^{k}\mu_i}{k}\right|>\varepsilon\right)=0$$

שימו לב שהמאורעות שעליהם אנו מבצעים איחוד הם מאורעות יורדים, כאלה שכל אחד מהם מכיל את הבאים אחריו. החוק אומר שעבור כל ε בהסתברות 1תהיה נקודת זמן שהחל ממנה לעולם לא סטייה תהיה של יותר מ ε. זאת אומרת שסטייה גדולה מ ε תהיה רק מספר סופי של פעמים.

<u>משפט</u>

על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט רביעי סופי, חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

לשם פשטות רישום הביטויים נניח כאן שתוחלת המשתנים היא אפס. מכל משתנה בעל תוחלת אחרת אפשר לקבל משתנה בעל תוחלת אפס על-ידי הזזה. הזזה גם מזיזה את התוחלת באותו גודל.
ננסה להוכיח את הטענה באמצעות הלמה של בורל קנטלי תוך שימוש באי שיוויון צ'בישב.

עבור כל n קבוע נקבל חסם $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right|>\varepsilon\right)<\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}=\infty$ ולכן לא ניתן באמצעות חסמים אלה לעשות שימוש בקריטריון של הלמה.

לכן נצטרך להשיג חסמים יותר טובים. הנחנו שלכל המשתנים שווי ההתפלגות יש מומנט רביעי סופי.
קיום מומנט מסוים סופי גורר גם את סופיות כל המומנטים הנמוכים יותר.

<u>הוכחה שהחוק החזק חל על סדרה זו</u>

באי שיוויון צ'בישב אנו למעשה מפעילים את אי שיוויון מרקוב על רבועי הסטיות מהתוחלת. רבועי הסטייות הן אי שליליות ותוחלתן היא השונות. כאן נפעיל את אי שיוויון מרקוב על החזקות הרבעיות של הסטיות מהתוחלת. החזקות הרבעיות הן גם אי שליליות והנחנו כאן שהן שוות לקבוע סופי.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right) = P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 > n^4\varepsilon^4\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = \sum_{i-1}^{n} E\left(X_i^4\right) + \sum_{i\neq j}\binom{4}{2}E\left(X_i^2 X_j^2\right) + \sum_{i\neq j}\binom{4}{3}E\left(X_i^3 X_j\right) +$$

$$+\sum_{i,j,k}\binom{4}{2}\binom{2}{1}E\left(X_i^2 X_j X_k\right) + \sum_{i,j,k,l} 4!E\left(X_i X_j X_k X_l\right)$$

מכיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים אז מומנט של מכפלה שווה למכפלת המומנטים. מכיון שהנחנו שהתוחלת היא אפס אז כל מכפלה של מומנטים שבה מופיע גם מומנט ראשון של משתנה שווה לאפס. כמו-כן מכיוון שהמשתנים הם שווי התפלגות אז המומנטים של משתנים שונים הם שווים.

נקבל חסם $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = nA + \binom{4}{2}\binom{n}{2}B^2 < nA + 6n^2B^2$. כאשר A ו B הם המומנטים הרביעי והשני של המשתנים.

כעת נפעיל את אי שיוויון מרקוב $P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 > n^4\varepsilon^4\right) < \frac{nA + 6n^2B^2}{n^4\varepsilon^4}$. וזה מתנהג כמו $\frac{1}{n^2}$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$. לכן בהסתברות 1 רק מספר סופי של פעמים הממוצע יסטה מהתוחלת ביותר מ ε. כך עבור כל ε. לכן על הסדרה חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

נתן דוגמא שבה החוק החזק חל על סדרה למרות שהמשתנים הם תלויים.

יהי $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 0.5$. נניח שאם $(X_1 = 0)$ אז עבור כל $i \geq 2$ מתקיים $P(X_i = 0) = 1$ ואם $(X_1 = 1)$ אז עבור כל $i \geq 2$ מתקיים $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5$ באופן בלתי תלוי ביניהם בהינתן ש $(X_1 = 1)$.

המשתנים הם תלויים כי למשל עבור כל $i \geq 2$: $P(X_i = -1 \mid X_1 = 1) > 0 = P(X_i = -1 \mid X_1 = 0)$

עבור כל $i \geq 2$: $E(X_i) = 0.5 \cdot 0 + 0.5(0.5\cdot(-1) + 0.5\cdot 1) = 0$. רק למשתנה X_1 יש תוחלת ששונה מ 0 (שווה 0.5). לכן סדרת התוחלות מצטברות של המשתנים שואפת ל 0.

אם $(X_1 = 0)$ אז כל המשתנים מקבלים ערך 0 ולכן סדרת הממוצעים היא של אפסים והיא שואפת לסדרת התוחלות.

בהינתן ש $(X_1 = 1)$ אז הסדרה של המשתנים הבאים היא סדרה בלתי תלויה של משתנים בעלי מומנט רביעי סופי $0.5\cdot(-1)^4 + 0.5\cdot 1^4 = 1$, לכן על סדרה זו חל החוק החזק וסדרת הממוצעים שלה שואפת ל 0 שהיא התוחלת של המשתנים. לכן סדרת הממוצעים של הסדרה כולה כולל X_1 שואפת לאפס שהיא התוחלת (ההשפעה של משתנה בודד נעשית זניחה).

לכן בכל מקרה סדרת הממוצעים שואפת לאפס והחוק החזק חל על הסדרה למרות שהמשתנים תלויים.

שאלה

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרת משתנים. מתקיים $P(X_1=0)=1$, עבור $i \geq 2$ התפלגות X_i נקבעת על-פי הערכים שקבלו $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$. מתקיים $X_i = -\left(\sum_{k=1}^{i-1} X_k\right) + Y_i$ כאשר המשתנים Y_i הם בלתי תלויים ומקיימים $P(Y_i=0)=1-\frac{2}{i}$, $P(Y_i=i)=P(Y_i=-i)=\frac{1}{i}$

א. הראו שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.
ב. הראו שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

פתרון

א. בכדי שעל הסדרה יחול החוק החזק, צריכה סדרת הממוצעים המצטברים לשאוף לסדרת התוחלות המצטברות, זאת בהסתברות 1. כאן סדרת הסכומים המצטברים $\{S_i\}$ שווה למעשה לסדרה $\{Y_i\}$.
לכל i , Y_i הוא בעל תוחלת אפס לכן אילו החוק החזק היה חל על הסדרה היתה צריכה הסדרה $\left\{\frac{Y_i}{i}\right\}$ לשאוף לאפס בהסתברות 1. המאורעות $A_i=(Y_i=i)$ הם בלתי תלויים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1, אין סוף פעמים $\left(\frac{S_i}{i}=1\right)$ לכן אין התכנסות של הסדרה $\left\{\frac{S_i}{i}\right\}$.

ב. כאמור $E\left(\frac{S_i}{i}\right)=E\left(\frac{Y_i}{i}\right)=0$. מתקיים $P\left(\frac{S_i}{i}\neq 0\right)=\frac{2}{i}$ אך $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2}{i}\right)=0$, לכן בודאי עבור כל $\varepsilon>0$, $\lim_{i\to\infty} P\left(\left|\frac{S_i}{i}-E\left(\frac{S_i}{i}\right)\right|>\varepsilon\right)=0$.