

סלילות חזרה

קנס על קדוח פגיל

י'פ' א-משענה מקב'י, מפחר לבק אנטש את פערק ש א יק'ס.
 במפחר קנס על כל סל'י'ה של פפ'מור שאלו מהערק פמתק'ס.
 בקנס שולל אנדור פפגיל. את אויבר ערק כטוי אמפחר אנטש,
 ומ'ל תולתת בקנס למקרה שפ'ו פני'ל'ש?

פתרון

י'פ' a פערק שפ'טל מנטש, ותולתת בקנס פ'ל $\epsilon(x-a)^2$.

$$\epsilon(x-a)^2 = \epsilon((x-\epsilon(x)) + (\epsilon(x)-a))^2 =$$

$$= \epsilon \left[(x-\epsilon(x))^2 + (\epsilon(x)-a)^2 + 2(\epsilon(x)-a)(x-\epsilon(x)) \right] =$$

$$= \epsilon (x-\epsilon(x))^2 + (\epsilon(x)-a)^2 + 2(\epsilon(x)-a)\epsilon(x-\epsilon(x))$$

($\epsilon(x)$ | a הם קדוצ'ים, ומתק"ם שיתולתת מפפ'טת קדוצ

דמשתנה שולל אמפפ'טת בקדוצ דמשתנה).

מתק"ם $\epsilon(x-\epsilon(x)) = \epsilon(x) - \epsilon(x) = 0$, אכן פיתסק פ'ל'ש מט'ל'ם.

מתק"ם $\epsilon(x-\epsilon(x))^2 = V(x)$, אכן תולתת בקנס שולל ל

$V(x) + (\epsilon(x)-a)^2$, פיתולתת פ'נ'מ'כ'ה ד'ו'ת'ר מתק'ל'ת ס'ל'ר

$a = \epsilon(x)$, למקרה ז'ה תולתת בקנס פ'ל $V(x)$.

סוג'ב

אמפאר יש שקל אחד, פטל הוצב אפג'יע'ל' א' שקל'ים.
 דגל של' א' א'צ' פטל' א'ל' בת'יש', פטל' אמפאר' א'ל' א'ל'
 קפ'טל. דגל' פ'י'מור' יש' א'ו' ס'כ'ו' ק' א'כ'פ'י'ל' א'ת' פ'וט'ו' ו'ס'כ'ו'
 $q=1-p$ א'כ'פ'י'ל' א'ת' א'ל' פ'וט'ו'.

א. מפ'י' פ'ה'ס'ט'ר'ו'ת' ש'פ'ט'ל' י'צ'יע' א'ל' שקל'ים' ?

ת'ש'א'ר'ה' : q - פטל' ז'ב'ק' א' ז'כ'ו'ת', א'ת'ר'ת' פטל' י'כ'ס'י'.
 ג. נ'י'ח' ש'פ'ט'ל' ז'ב'ב' פ'צ'מ'י'ם' ק'פ'י'מור', י'מ'פ' כ'ע'ת' ס'כ'ו'י'ו' א'נ'ר'ת' ?

ת'ש'א'ר'ה' : ז'ב'ק' א'צ'ו'ז' י' נ'ז'ח'ו'ט'ת' ו'א'כ'ן' פ'ס'כ'ו'י' פטל' י'ק'.
 ז. נ'י'ח' ש'פ'ט'ל' א'ל' פ'ג'יע' א'ל' שקל'ים', מפ'י' פ'ה'ס'ט'ר'ו'ת' ש'פ'ט'ל'

ש'י'ת'ק' א'כ'ל' פ'י'ו'ת'ר' 3 מ'ש'ת'ק'י'ם,

ת'ש'א'ר'ה' : י'פ'ו' A פ'ט'ל'ו'ע' ש'פ'ט'ל' א'ל' פ'ג'יע' א'ל' שקל'ים'.

י'פ'ו' B פ'ט'ל'ו'ע' ש'פ'ט'ל' א'ל' ש'י'ת'ק' י'ו'ת'ר' מ' 3 ס'י'ד'ו'ל'ים',

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1-p^3}{1-p^6}$$

על

יפוי X משתנה מקרי בהתפלגות $U(0,1)$. קחו את $Y = X^2$.
 מצאו את $E(Y)$.

א. מהי תוחלת שטח הריבוע?בתרגיל: הבה נראה את ההתפלגות של X^2 .

$$E(X^2) = \int_0^1 f_X(x) \cdot x^2 dx = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ב. מהי ההסתברות ששטח הריבוע קטן מ-0.5?

$$P(X^2 < 0.5) = P(X < \sqrt{0.5}) = \frac{\sqrt{0.5} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכל משתנה מקרי $U(a,b)$ מתקיים עבור כל $a < y \leq b$:

$$P(Y \leq y) = \frac{y-a}{b-a}$$

אם $a < y < b$, אז $P(Y \leq y) = \frac{y-a}{b-a}$.

ג. מהי תוחלת פיקסור הריבוע?

$$E(4X) = 4 \cdot E(X) = 4 \cdot \frac{0+1}{2} = 2$$

(התוחלת של משתנה $U(a,b)$ היא $\frac{a+b}{2}$)

ד. מהי ההסתברות ששטח הריבוע יהיה בין $\frac{1}{4}$ ל- $\frac{1}{3}$?

בתרון

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{1}{4} \leq S \leq \frac{1}{3}\right) &= P\left(\frac{1}{4} \leq X^2 \leq \frac{1}{3}\right) = \\
 &= P\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \leq X \leq -\sqrt{\frac{1}{4}}\right) + P\left(\sqrt{\frac{1}{4}} \leq X \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \\
 &= 0 + P\left(\sqrt{\frac{1}{4}} \leq X \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = P\left(X \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\right) - P\left(X \leq \sqrt{\frac{1}{4}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{1}{3}} - 0}{1-0} - \frac{\sqrt{\frac{1}{4}} - 0}{1-0} = \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{4}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{4}}}{1-0} \mid \text{פונקציה של } \left(\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

סוג
 דגימה יש 30 ילדים. כל ילד משחק שש כל ילד אחר פעם
 אחת. דבר משחק יש מנצח אחד. מהי תוחלת מספר הפגישות
 הכולל של ילדי הכיתה?

בתרון: יש $\binom{30}{2}$ משחקים ודבר משחק יש דבר מנצח אחד.
 אם התוחלת היא $\binom{30}{2}$.

עמ'ו שיהיה את תנאי השאלה. נניח שהמשחק מסתיים

דבר קטן קטן $\frac{1}{3}$. מהי תוחלת מספר משחקי היתרון?

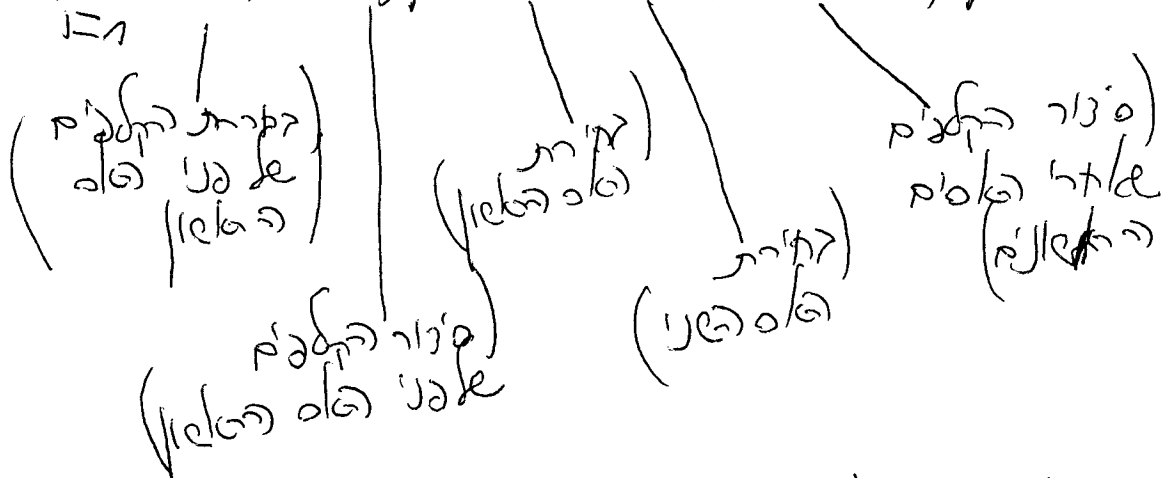
בתרון: יש $\binom{30}{2}$ אינדיקטורים שהם אחד מהם הוא הילדה קטן
 $\frac{1}{3}$. אם התוחלת היא $\frac{1}{3} \binom{30}{2}$. או אבא אבא שיהיה משחק
 היתרון מתבטא דינמי, כי כל נניח יש את תוחלת גון משחקים.

שאלה
 קבוצת קבוצות יש 52 קבוצות שמתחתן 4 הם אס'ים.
 מעוררים את הקבוצות, מתקדם סדר אקס'ים, מהי ההסתברות
 שהיאם בפני מופיע מ'3 אחר האם הפסלון?

פתרון דרך טלור

מרחק מנצח של סוף שורה - $|A| = 52!$

$$|A| = \sum_{i=1}^{48} \binom{48}{i-1} (i-1)! \binom{4}{1} \binom{3}{1} (52-(i+1))!$$



$$|A| = 52!$$

פתרון דרך שניה

נגזר את האם שיהיה שני, נסדר את יתר הקבוצות.
 נשים את האם סגור דהחלפה מ'3 אחר האם הטלון.

$$|A| = 4 \cdot 51! \implies P = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{1}{13} \quad \text{נקודת}$$

פתרון דריק של'ט

$$|A| = \binom{52}{4}$$

(15 גוליות במיקומים של ארבעת האסים לכל משולב).

$$|A| = \binom{51}{3}$$

(כאן מיקום אחד של אסם ראשון האסום האחרון האסום השני).

ומיקומו של אסם ראשון, אסם שני, אסם שלישי, אסם רביעי, אסם חמישי, אסם שש.

$$p = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{52}{4}} = \frac{\frac{51!}{3!48!}}{\frac{52!}{4!48!}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

גבולות קובץ הנתונים של $\text{Cov}(X, Y)$

'כיון X, Y הם משתנים מקבילים הם' אלווא $V(X), V(Y)$
 נסו להם $V(X-Y)$ אלווא $V(X+Y)$ אלווא $V(X+Y)$ אלווא $V(X-Y)$

$$0 \leq V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \quad \text{כאשר}$$

$$\implies V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \geq 0$$

$$\implies \text{Cov}(X, Y) \leq \frac{V(X) + V(Y)}{2}$$

נסו להם $V(X+Y)$

$$0 \leq V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\implies \text{Cov}(X, Y) \geq -\frac{V(X) + V(Y)}{2}$$

כעת נסתכל על סדרת משתנים מקבילים $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ אלווא
 אלווא אלווא אלווא. האם יתכן $\text{Cov}(X_i, X_j) = V(X_i)$ אם $j > i$?

תשובה ק. יתכן אם המשתנים הם בעצם אותו אלווא
 וכן סלם אלווא. $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i)$

אם יתכן אם האלווא אלווא אלווא.

אלה האם אלווא אלווא יתכן אלווא? $\text{Cov}(X_i, X_j) < 0$?

תאורה / שיהיה יתכן שאלו הם שני התפלגויות זהות

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{מאזנת}$$

$$V(X_i) = \sigma^2 \quad \text{כל } i, \quad V(X_n) = \sigma^2 \quad \text{על } n$$

מכיון שהם שני התפלגויות זהות כל שני i, j מתקיים

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n \cdot \sigma^2 + 2 \binom{n}{2} \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) \quad \text{נקודת}$$

$$\text{כל } V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq 0 \quad \text{על } n$$

$$n \cdot \sigma^2 + n(n-1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) \geq \frac{-\sigma^2}{n-1}$$

השקפה רבה (כל) כל n וכל σ^2 וכל $\text{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$!

אלה 'ו' $X \sim P(1)$ מ.צ. $E(|X-1|)$

פתרון

$$\begin{aligned}
 E(|X-1|) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) |k-1| = \\
 &= P(X=0) \cdot |0-1| + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) (k-1) = \\
 &= e^{-1} \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) \cdot k - \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) \cdot 1 = \\
 &= e^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot k - P(X=0) \cdot 0 - (1 - P(X=0)) = \\
 &= e^{-1} + E(X) - (1 - P(X=0)) = \\
 &= e^{-1} + 1 - (1 - e^{-1}) = 2 \cdot e^{-1}
 \end{aligned}$$

אלה מטיילים קורה תקנה 3 הילא ג'י. מ' בהסתברות
 שמכפלת המילא תב' כפלה א 5 ?

פתרון

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$ (המילא א 3 בעמ'ם בתקרה מילא
 אנה מ 5, רק ע' קחת 5 אכסר עמ'ע עכפ' א 5).
 אם פ'יו הו'ם שמכפלה תב' ז'ק 5 א' בהסתברות
 ב'ת' $\binom{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$ (בעמ'ם אק' 1 ובצ' א'ת אק' 5).

$\frac{\text{סוגים}}{\text{שינוי מקצוע}}$ פילוסוף מקרי על פישר. הפטל מתחיל קטלית וזהם
 של הפטל עשה צעז צעז אחר ימנה קט'ט' 0.5 או צעז אחר
 שאלה קט'ט' 0.5 האם ד"ר קטל'ים פאח'ים.
 מפי' ההסתברות שזו של 9 הפטל יגיע אפוא כעם
 אחר אקונה 5?

$\frac{\text{בתרון}}{\text{ש"ס}}$ של שקונה 5 הפטל יכול לכוון יק קטל'ים 5,7,9.

- יפ"ו A_5 - הפאליז ששל 5 הפטל קונה 5.
- A_7 - הפאליז ששל 7 הפטל קונה 5.
- A_9 - הפאליז ששל 9 הפטל קונה 5.

$P(A_5 \cup A_7 \cup A_9)$ מקרה

$$P(A_5 \cup A_7 \cup A_9) = P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) - P(A_5 \cap A_7) - P(A_5 \cap A_9) - P(A_7 \cap A_9) + P(A_5 \cap A_7 \cap A_9)$$

$P(A_5) = 0.5^5$

$P(A_7) = \binom{7}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5$

(שאלה) (קט'ט') (קט'ט') (קט'ט')

$P(A_9) = \binom{9}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^2$

(שאלה) (קט'ט') (קט'ט') (קט'ט')

$$P(A_5 \cap A_7) = 0.5^5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

(להג'ים 5 מקורה 5 ג 5 צעדים ולאב אצרות צעדי אחר ימינה וצ'עדי אחר שמאלה).

$$P(A_5 \cap A_9) = 0.5^5 \binom{4}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2$$

(כאן אחר ההצעה מקורה 5 צעדים שמאלה וצ'עדים ימינה וצ'עדים שמאלה).

$$P(A_7 \cap A_9) = \binom{7}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

$$P(A_5 \cap A_7 \cap A_9) = 0.5^5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

דוג' 10

$W = \min\{X, Y\}$. ג"כ $Y \perp X, Y \sim G(p), X \sim G(p)$

מהי תוחלת מספר ההשתנים מג'ין X, Y, W שקונים נ 3?

נענה על שאלה מלה' אחר אחר התפלגות מספר נכפ.

$X_1 -$ א'ונצ'קור'ם $(X < 3)$, $Y_1 -$ א'ונצ'קור'ם $(Y < 3)$,

$W_1 -$ א'ונצ'קור'ם $(W < 3)$.

מספר ההשתנים שקונים נ 3 הוא $X_1 + Y_1 + W_1$.

תוחלת $E(X_1 + Y_1 + W_1)$

מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות של

$$E(X_1 + Y_1 + W_1) = E(X_1) + E(Y_1) + E(W_1)$$

$$E(X_1) = P(X < 3) = 1 - q^2 \quad E(Y_1) = E(X_1) = 1 - q^2$$

$$E(W_1) = P(W < 3) = 1 - P(X \geq 3, Y \geq 3) \stackrel{\text{ג"כ}}{=} 1 - P(X \geq 3)P(Y \geq 3)$$

$$= 1 - q^2 \cdot q^2 = 1 - q^4$$

סוג' ב

מקצועים סברה של הטלוח ג' של מטרת שטח של
 עם קט' $\frac{1}{3}$ ושל כל קט' $\frac{2}{3}$.

י' W - בעצם שנה זכינו לטלוח אטוח את שתי
 הטרזיות. כלר X -מטר הטרזיות עז קט' עם

! Y -מטר הטרזיות עז קט' כל, אט $W = \max\{X, Y\}$.
 גרד $E(W)$

בתר' ב
 מקצועים הטלוח וטלוח'ה יש קט' $\frac{1}{3}$ זמן המתנה
 כל' וקט' $\frac{2}{3}$ זמן המתנה עם. אט כלר הטרזיה
 הטרזיה יש קט' $\frac{1}{3}$ זמן המתנה המתפל $G(\frac{2}{3})$ וקט'
 $\frac{2}{3}$ זמן המתנה המתפל $G(\frac{1}{3})$.

$$E(W) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

(הטרזיה) קט' (הטרזיה) קט' (הטרזיה) קט'
 אט זטלוח $G(\frac{2}{3})$ זטלוח $G(\frac{1}{3})$

בתר' ב / בתר' ב קצ' ע'ה

$$\min\{X, Y\} + \max\{X, Y\} = X + Y$$

$Z = \min\{X, Y\}$ י'ה

צאת אומרת שמתקיים $Z+W=X+Y$

(אחד מקין X ו Y פטל המינמלי אחר פטל המכסימלי).

$$E(Z+W) = E(X+Y) \implies E(Z)+E(W) = E(X)+E(Y)$$

$$E(X) = \frac{1}{3} = 3 \quad E(Y) = \frac{1}{3} = 1.5$$

פמינמלי X ו Y ח'ק עקרה אה פהק 1, כ

דהטלה פהטלה מקה'מ איש'ה טעלה.

$$E(W) = E(X) + E(Y) - 1 = 3 + 1.5 - 1 = 3.5$$

אלה מהו $P(W > 5)$?

פתרון

דה'מ אה 5 ע'מ ר'בו'מ אה 5 פ'י ר'בו'מ ו'מ $(\frac{1}{3})^5 + (\frac{2}{3})^5$.

עכ'ו נ'ח שהמטרה פהק, צאת אומרת שטלה ע'מ

ע'מ ו'פ'י קמ'מ'מ 5.5 כ' אה. מהו $V(W)$?

פתרון

מק'מ'ה הטלה ואח'ה יש לה מקה ס'רת הטלה שמהטלה

$G(0.5)$ ע'מ קה'ת ה'טעלה הטע'ת. 'ה' ד-מ'ה הטלה אח'ה

$$V(W) = V(T+1) = V(T) = \frac{0.5}{0.5^2} = 2, \quad W = T+1$$

טלה 14 (אוליג'ה)

אינדקציות שונות עפ"י צור

השונות פ"א מצט"ע עפ"י צור, אולם אף מצט"ע פ"א לא מנא"ס

וב"ס מצט"ע נ"תן רק תמונה חלקית.

נתן כאן צוגמ"א שזה אמשתנה אחרת יש עפ"י צור ג"כ יותר

א"ס במצט"ע פ"א ממוצע ר"קו"ע הפ"ס"ה מהתחל"ת (השונות)

ואמשתנה אחרת יש עפ"י צור ג"כ יותר א"ס במצט"ע פ"א ממוצע

הצ"כ"ס המוחל"ט"ס של הפ"ס"ה מהתחל"ת.

י"פ' X משתנה במק"י"ם $P(X=10) = P(X=-10) = 0.5$

י"פ' Y משתנה במק"י"ם $P(Y=1) = P(Y=-1) = 0.49$

$P(Y=100) = P(Y=-100) = 0.01$

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = 0.5 \cdot 10^2 + 0.5 \cdot (-10)^2 = 100$$

$$V(Y) = E(Y - E(Y))^2 = 0.49 \cdot (1-0)^2 + 0.49 \cdot (-1-0)^2 +$$

$$+ 0.01 \cdot (100-0)^2 + 0.01 \cdot (-100-0)^2 = 200.98$$

לכן אם Y יש שונות ג"כ יותר מאשר אם X .

$$E(|X - E(X)|) = 0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 10 = 10$$

$$E(|Y - E(Y)|) = 0.49 \cdot 1 + 0.49 \cdot 1 + 0.01 \cdot 100 + 0.01 \cdot 100 =$$

$$= 2.98$$

ש"מ"א