מרחבי הסתברות

בחיים אנו שואלים שאלות כמו מה הסיכוי שתתקבל התוצאה 6 בהטלת קוביה או שתוצאות שתי ההטלות הראשונות יהיו זהות. גישה אחת לענות על שאלות אלה היא לחזור על ניסוי הרבה פעמים ולבחון את שכיחות המאורעות. אך לא תמיד ניתן לחזור על ניסוי הרבה פעמים, וגם אם נחזור עליו הרבה פעמים יתכן שלא נדע את השכיחות המדויקת. אם מטבע הוגן אז סביר שלאחר הרבה הטלות השכיחות של כל אחת מהתוצאות תהיה דומה. אבל אף פעם לא נוכל לדעת בוודאות שהמטבע הוגן. גם אם המטבע לא הוגן, אז יתכן שעד שלב סופי, גם אם גדול, תהיה שכיחות כל אחת משתי התוצאות דומה.

נרצה לבנות מודל למרחב הסתברות שמתאים לתפיסתנו האינטואיטיבית לגבי הסתברות.

מודל זה יכיל כמה מרכיבים.

א. מרחב מדגם של אוסף תוצאות (נקודות) אלמנטריות שלא ניתנות לחלוקה.

ב. אוסף של מאורעות שכל אחד מהם הוא קבוצה של נקודות. לגבי אוסף זה נדרוש כמה דרישות. הקבוצה הריקה $\emptyset$ כלולה באוסף, גם הקבוצה Ω שמכילה את כל הנקודות כלולה באוסף. כמו כן המשלים של כל קבוצה שבאוסף גם כלול באוסף, והאיחוד של קבוצות מהאוסף גם כלול באוסף.

ג. לכל קבוצה שבאוסף נתאים פונקציית הסתברות. לקבוצה A נתאים הסתברות $P(A)$. נניח התנאים $1=P(\Omega)$ (בודאות נקבל איזשהי תוצאה).
אם יש אוסף בן מניה של מאורעות (קבוצות) זרות $A_1, A_2, \ldots$ אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
לכל קבוצה יש הסתברות אי שלילית.

מההנחות שהנחנו על מרחב ההסתברות ניתן לקבל
עוד תכונות שהן מתקיימות. לא כללנו אותן
בקבוצת האקסיומות, כי ניתן להסיק אותן מאלה
שרשמנו.

א. $P(\phi)=0$ (ההסתברות שלא תתרחש אף תוצאה
היא אפס).

הוכחה:

קבוצה ריקה היא זרה לכל קבוצה ובפרט לעצמה.
נסתכל על אוסף קבוצות $i=1,2,\dots$ המקיימות $A_i=\phi$
לכל i טבעי. מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\phi=A_1$.
מתקיים $P(A_1)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_1)$.
לכן בהכרח $P(A_1)=0$. לכן $P(\phi)=0$.

ב. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ עבור כל אוסף
של קבוצות שהן זרות. שימו לב שזו תכונה
שמזכירה תכונה מהאקסיומות, אבל כאן האיחוד
הוא סופי ולא בן מנייה אינסופי.

הוכחה

נגדיר אוסף קבוצות B_i $1\le i<\infty$: עבור כל $1\le i\le n$ יתקיים $B_i=A_i$. עבור כל $n<i$ יתקיים $B_i=\emptyset$. נשים לב ש

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=$$

$$=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$$

ג. עבור כל $B\subseteq A$ מתקיים $P(B)\le P(A)$.

הוכחה

מתקיים $A=B\cup(A\setminus B)$ לכן $P(A)=P(B)+P(A\setminus B)$, מהאי-שליליות של ההסתברות של $A\setminus B$ נקבל את הטענה.

ד. לכל A מתקיים $0\le P(A)\le 1$.

הוכחה

A מכילה את הקבוצה הריקה ולכן $0\le P(A)$.

A מוכלת ב Ω ולכן $P(A)\le 1$.

ה. $P(A^c)=1-P(A)$.

הוכחה

A ו- A^c הן קבוצות זרות שאיחודן הוא Ω.

לכן $P(A)+P(A^c)=P(A\cup A^c)=P(\Omega)=1$.

דוגמא למרחב הסתברות

מטילים קוביה. אוסף התוצאות האלמנטריות הן $\{1,2,3,4,5,6\}$. נגדיר על אוסף קבוצות

$$\{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$$

ונתאים לקבוצה $\{1,2\}$ הסתברות של 0.2

ולקבוצה $\{3,4,5,6\}$ הסתברות של 0.8.

נשים לב שכל איחוד מכל סוג של קבוצות שבאוסף גם נמצא באוסף.

טענה

לכל אוסף מאורעות $\{A_i\}$ מתקיים $P(\cup A_i) \le \sum P(A_i)$

הוכחה

נגדיר מאורעות $\{B_i\}$. עבור כל i יתקיים

$$B_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j<i} A_j\right)$$

$\{B_i\}$ הם אוסף מאורעות זרים. לכן

$$P(\cup A_i) = P(\cup B_i) = \sum P(B_i) \le \sum P(A_i)$$

הסברים:

לכל i $B_i \subseteq A_i$ לכן $P(B_i) \le P(A_i)$.

נראה ש $\cup A_i = \cup B_i$.

יהי $x \in \cup A_i$ אז x שייך ל A_j כלשהו (j מינימלי).

לכן $x \in B_j$ ולכן $\cup A_i \subseteq \cup B_i$.

שלומי