

עבודה

1

חוסמים עם הסתברות/אויסוינס

מט'ק"ב

יפה' X - משתנה מקרי. נניח $E(X) = 1$, האם יתכן
שהתק"ם $P(X \geq 5) > 0.5$?

תשובה
כן. יתכן למשל שהתק"ם $P(X=10) = 0.1$, $P(X=-80) = 0$,
באז את פערק פזקרה ≥ 10 מקצט עיק שלילי,
כק שהתחלת פטל 1.

אולם מה קורה אם אין אפשרות לקצט ערכים שליליים,
שאת אומרת אם לא מתקבלים ערכים שליליים?

אויסוינס מיקד

יפה' X משתנה מקרי פתק"ם $P(X \geq 0) = 1$.

נניח שהתק"ם $E(X) = \mu$, אז עבור כל $a > 0$ מתק"ם

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$$

פזכרה

$$\mu = E(X) = \sum_k P(X=k) \cdot k = \sum_{k < a} P(X=k) \cdot k + \sum_{k \geq a} P(X=k) \cdot k \geq$$

2

$$\geq \sum_{k < a} p(x=k) \cdot 0 + \sum_{k \geq a} p(x=k) \cdot a = 0 + a \sum_{k \geq a} p(x=k) = a \cdot P(X \geq a)$$

$$\mu \geq a \cdot P(X \geq a) \quad \text{קולמו e}$$

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a} \quad \text{s/c}$$

למשל

מקצעים סכמה של האלטר ג'י' של קולמו, יש 500 מנצחתי.
 כמה שלג עולים מספר מנצחתי שאלו עתעצות האלטר
 הקולמו שלג זה.
 מנצחו חסר עציון על פהיסעיות של 100 האלטר
 נעשה לנצחתי 500 מנצחתי.

סתרונו יפוי S_n סכום n האלטר הטלטר.

יפוי S_{100} סכום 100 האלטר הטלטר.

פמאורע שניע אל 500 מנצחתי פמא $(S_{100} \geq 500)$.

מתק"ם סכמו X_i - עתעצות האלטר: $E(S_{100}) = E(\sum_{i=1}^{100} X_i)$

$$E(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \sum_{i=1}^{100} 3.5 = 350$$

2

$$P(S_{100} \geq 500) \leq \frac{E(S_{100})}{500} = \frac{350}{500} = 0,7$$

בעזרה
 במקרה צבא שיוויין מריקוד אלא מספק שום אינפורמציה
 מעלתית, שמו אג שהתפלגות פוסטם אג 100
 האלוא פלא סימטריה סדק 350, ואכן קוצאלי הפוסטם
 זכום מ 500 קהיתת קוד שאינה יותר מ 5.5.

אלא
 פלאם נבקקנו אהנות פלאי תלואת שקן ההאלוא
 כבי אפלי'ע ארשוה?

תשובה
 המציאת פוסטם אבי אלו שיוויין מריקוד אלא נבקקנו
 אלו תלואת, S_{100} פלא סכום אג 100 משתנים מקריים
 אג האלוא, תלואת סכום שונה אפסום פולואלואת אלו
 קטר אלו תלואת, פוסק בפירון מסתמק רק אג התואלואת
 אג S_{100} שפלא דום מקיה 350, אלו אריועון האודר
 מתקב אג סימטריה בן הפיתמכנו אג אלו תלואת,
 הפוסטם איננו קהיתת סימטרי' פדק 350 אס אן אלו תלואת.

מס' 13
מס' 14

שאלה 4
"ע"ק" מס' 0.6 וגם "ע"ק"

קס"ו 0.4 . יפ"ו $X - \text{מס' } 0.6$ "ע"ק"

קראתה לזכור $E(X) = 0.6$

$$P(X \geq 1) = 0.6$$

ע"פ אי שיוויון מרקוב $P(X \geq 1) \leq \frac{E(X)}{1} = \frac{0.6}{1} = 0.6$

בא"כ אי שיוויון מרקוב נותן חסם פנימי. פטל נותן

את ההסתברות האמיתית למאורע $(X \geq 1)$.

כ"כ שט"מ דרוש להקנות, זה לא קרה ת"מ'3.

אי שיוויון צ'ביצ'ב

יפ"ו X משתנה מקרי בעל תוחלת $E(X)$ ושונות $V(X)$,

א"כ עבור כל $a > 0$ מתקיים

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

הוכחה (אי שיוויון מרקוב)

$$P(|X - E(X)| \geq a) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$$

ציון נוסף שהשגה חסר יותר טווח קטן יותר הפחיתות של קצב.
 נוסף אחרים את $P(S_{100} \geq 500)$.

$$E(S_{100}) = 350$$

$$V(S_{100}) = 100 V(X_1) = 100 \cdot \frac{(6-1+1)^2 - 1^2}{12} = 100 \cdot \frac{35}{12}$$

$$\begin{aligned} \implies P(S_{100} \geq 500) &\leq P(|S_{100} - 350| \geq 150) \leq \frac{V(S_{100})}{150^2} \\ &= \frac{100 \cdot \frac{35}{12}}{150^2} \end{aligned}$$

כלל חסר פחות ויותר טווח מ-7.5.

הערה
 מכיון שהכנסות סימטרי סביב 350, אם ניקח עקום
 חסר טווח יותר, פתאום $(|S_{100} - 350| \geq 150)$ פטל אלוו
 שני פתאום $(S_{100} \leq 200)$ ו- $(S_{100} \geq 500)$. אכן
 ניקח עקום חסר פטל חצי מהחסר $(|S_{100} - 350| \geq 150)$.

דוגמה פתרון הבעיה
 מצביה שולח האקסיון ה מכתבים מ האנשים.

X-מספר האנשים שמקבלים מכתב נכון.
 מצאו חסמים עליונים מ $P(X \geq 2)$, $P(X \geq 3)$,
 $P(X \geq n-1)$.

מתק"ם $\epsilon(x)=1$, $V(x)=1$

$$P(X \geq 2) \leq \frac{\epsilon(x)}{2} = 0.5$$

אם אי שיויון מרקד

$$P(X \geq 2) \leq \frac{V(x)}{(2-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

אם אי שיויון צ'רסק

ואם הפקט כלום מאי שיויון צ'רסק.

$$P(X \geq 3) \leq \frac{\epsilon(x)}{3} = \frac{1}{3}$$

אם אי שיויון מרקד

$$P(X \geq 3) \leq \frac{V(x)}{(3-1)^2}$$

אם אי שיויון צ'רסק

כאן אי שיויון צ'רסק נתן חסם טוב יותר.

$$P(X \geq h-1) \leq \frac{\epsilon(x)}{h-1} = \frac{1}{h-1}$$

אם אי שיויון מרקד

$$P(X \geq h-1) \leq \frac{V(x)}{(h-1-\epsilon(x))^2} = \frac{1}{(h-2)^2}$$

אם אי שיויון צ'רסק

ואם אי שיויון צ'רסק עזבים עזרו עזי ח וזכרם.

אזלם למשה

$$P(X \geq h-1) = P(X=h-1) + P(X=h) = 0 + \frac{1}{h} = \frac{1}{h}$$

(אם יתכן e ו- $h-1$ אנשים יקראו מבנה מתאים ואז

אז יקרא מבנה לא מתאים, אם $h-1$ אנשים מקבלים

מבנה מתאים אז לא צד $h-1$ נאר המבנה של).

קבלנו המתיחות מצולקת, דמאן שאי השינויים לא נתנו

שיווי

המתיחות מצולקת.