<u>תוחלת</u>

שלומי

אנחנו יודעים לחשב ממוצעים. גם להתפלגות יש ערך ממוצע. ערך זה מהווה שקלול של הערכים האפשריים. מדובר בממוצע של הערכים האפשריים (הצפויים).

בהרבה מקרים כאשר חוזרים על ניסוי הרבה פעמים, אז ממוצע התוצאות שואף לתוחלת.

<u>סימון התוחלת</u>: $E(X)$

<u>הגדרה</u>: $E(X)=\sum_k P(X=k)k$

מקבלים ערך ממוצע על-פני ערכים שונים.

<u>דוגמא</u>

אם $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=5)=\frac{1}{2}$ אז $E(X)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 5$

<u>דוגמא נוספת</u>

מצאו את $E(X)$ כאשר $X \sim Bin\left(3,\frac{1}{3}\right)$

<u>פתרון</u>

$$E(X)=\sum_k P(X=k)k=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 0+\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 1+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 3$$

<u>הערה</u>

בהמשך תראו שיש דרך נוספת לחשב את התוחלת במקרה זה.

<u>טענה</u>

התוחלת של משתנה $X \sim U[a,b]$ היא $\frac{a+b}{2}$

זו תוצאה סבירה כי כל הערכים שבין a ל b מתקבלים בהסתברות שווה. נראה זאת על-ידי חישוב:

$$E(X)=\sum_k P(X=k)k=\sum\frac{1}{b-a+1}k\overset{1}{=}\frac{1}{b-a+1}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(b-a+1)=\frac{a+b}{2}$$

1. סכמנו טור חשבוני.

שאלה

ביום ראשון מגיעים 2 תלמידים בסיכוי 0.3 ו 3 תלמידים בסיכוי 0.7 . ביום שני מגיעים 1 תלמידים בסיכוי 0.6 ו 2 תלמידים בסיכוי 0.4 .

X - מספר הבאים ביום ראשון , Y - מספר הבאים ביום שני.

מצאו את $E(X)$ ואת $E(Y)$. נדון גם בערך שצריך לקבל $E(X+Y)$

פתרון

$$E(X)=0.3\cdot 2+0.7\cdot 3 \quad , \quad E(Y)=0.6\cdot 1+0.4\cdot 2$$

נצפה שתוחלת מספר הבאים תהיה שווה לסכום התוחלות של שני המשתנים.

מסתבר שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות בלי שום קשר להתפלגות המשותפת.

משפט חשוב

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

הוכחה למשפט

יהיו ε הנקודות במרחב המדגם.

$$E(X+Y)=\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)(X+Y)(\varepsilon)=\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)(X(\varepsilon)+Y(\varepsilon))=$$
$$\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)X(\varepsilon)+\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)Y(\varepsilon)=E(X)+E(Y)$$

הסתמכנו על כך שבכל נקודה בודדת מסכמים את ערכי ה-X שלה וה-Y שלה.

התוחלת של משתנה אינדיקטורי

$$P(X=0)=1-p \quad , \quad P(X=1)=p$$

מתקיים $E(X)=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p$

התוחלת של משתנה בינומי

התוחלת של משתנה $Bin(n,p)$ היא np כי משתנה בינומי הוא סכום של n אינדיקטורים שכל אחד מהם הוא הצלחה בסיכוי p .

הערה

לא השתמשנו בחישוב ההתפלגות של המשתנה. השתמשנו רק בכך שהמשתנה הוא סכום של אינדיקטורים שלגבי כל אחד מהם אנו יודעים את התוחלת.

$$E(X)=E\left(\sum X_i\right)=\sum E(X_i)=\sum p=np$$

<u>התוחלת של משתנה היפרגאומטרי</u> $HG(n;a,b)$

התוחלת של משתנה זה היא $n\frac{a}{a+b}$ כי המשתנה הוא סכום של n הוצאות שלכל אחת מהן יש תוחלת של $\frac{a}{a+b}$ (כל כדור הוא כחול בסיכוי $\frac{a}{a+b}$).

<u>הערה</u>

כאן האינדיקטורים הם תלויים. אך כאמור תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות.

<u>סוגית המזכירה הרשלנית</u>

למזכירה יש n מכתבים שמיועדים ל n אנשים שונים. נניח שעל כל אחת מ n מעטפות רשום שמו של אחד האנשים. המזכירה שמה את המכתבים באופן אקראי לחלוטין. מהי תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם ?

<u>פתרון</u>

X- מספר המכתבים שיגיעו ליעדם. X_i - האינדיקטור לכך שהמכתב ה- i יגיע ליעדו.

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

<u>סוגיה</u>

נניח שיש 8 אנשים שצריכים לקבל מכתב בודד כל אחד ויש אדם בודד שצריך לקבל שני מכתבים. שוב החלוקה היא אקראית לחלוטין. מהי תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם ? (סך הכל 9 אנשים ו 10 מכתבים)

X_i אינדיקטור שמכתב i יגיע ליעדו.

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=E\left(\sum_{i=1}^{8}X_i\right)+E(X_9)+E(X_{10})$$

מכתב שמיועד לאדם שצריך לקבל מכתב בודד יגיע אליו בסיכוי $\frac{1}{10}$. לכן לכל $1 \le i \le 8$ מתקיים $E(X_i)=\frac{1}{10}$. מכתב שמיועד לאדם שמיועדים לו שני מכתבים יגיע אליו בסיכוי $\frac{2}{10}$ כי ניתן להחליף בין שני המכתבים שמיועדים לאדם זה. לכן $E(X_9)=E(X_{10})=\frac{2}{10}$.

נקבל שתוחלת הסכום היא $8 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} = 1.2$.

<u>סוגיה</u>

מבצעים n הטלות ב"ת של מטבע הוגן. מהי תוחלת מספר התוצאות השונות שיתקבלו לפחות פעם אחת ?

<u>הערה לפני שנפתור</u>

לא יתכן שלא תתקבל אף תוצאה. יתכן שכל הזמן נקבל אותה תוצאה ויתכן שיתקבלו שתי תוצאות שונות (גיוון של תוצאות).

X- מספר התוצאות שנראה.

<u>דרך ראשונה</u>

$$P(X=1)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad , \qquad P(X=2)=1-P(X=1)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X=2)\cdot 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\cdot 2$$

<u>דרך שניה שהיא הדרך המומלצת שממנה תוכלו גם להפיק תועלת בבעיות אחרות</u>

X_1 - אינדיקטור לכך שעץ התקבל לפחות פעם אחת

X_2 - אינדיקטור לכך שפלי התקבל לפחות פעם אחת

X_1+X_2 זה מספר התמונות השונות שנזכה לראות.

$$E(X_1)=E(X_2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(למשל, נראה לפחות עץ אחד אם לא הכל זה פלי).

$$E(X_1+X_2)=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

שאלה

מהי תוחלת מספר התוצאות השונות שנראה ב- n הטלות ב"ת של קוביה תקינה ?

פתרון

X - מספר התוצאות שנראה.

X_i - נראה את תוצאה i

$$E(X)=E\sum_{i=1}^{6}X_i=\sum_{i=1}^{6}E(X_i)=6E(X_1)$$

המעבר האחרון נובע מסימטריה.

מתקיים $E(X_1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$: למשל כדי לראות את 1 צריך שלא כל התוצאות האחרות יהיו שונות ממנו.

בהסתברות של $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ נקבל שכל התוצאות שונות מ 1.

נקבל ש $E(X)=6\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$.

כעת נראה שלמרות שהרבה מתבסס על אינדיקטורים, לא הכל זה אינדיקטורים.

תוחלת של משתנה פואסוני $X \sim P(\lambda)$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\overset{taylor}{=}e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

גישה קצת שונה

יכולנו להתבסס על כך ש $\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ זה סכום הסתברויות של משתנה $P(\lambda)$ ולכן הסכום הוא שווה ל 1.

שאלה

X הוא משתנה מקרי בעל תוחלת $E(X)$. נניח שמתקיים $|y-E(X)|<|z-E(X)|$. האם בהכרח מתקיים $P(X=y)>P(X=z)$?

תשובה

לא. נראה שלא בהכרח על-ידי מתן דוגמא.

$$P(X=100)=P(X=-100)=0.5$$

התוחלת היא 0 . אבל כל ערך שקטן מ 100 מתקבל בהסתברות 0 בזמן שהערך 100 מתקבל בהסתברות חיובית.

<u>נוסחת הזנב לחישוב תוחלת</u>

יהי X משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים אז $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)$.

<u>נוכיח את הנוסחא</u>

$$E(X)\overset{1}{=}\sum_{i=1}^{\infty}P(X=i)i=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}P(X=i)\overset{2}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}P(X=i)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)$$

1. על פי הגדרת התוחלת

2. שינוי סדר סכימה

משמעות אינטואיטיבית: את $(X=i)$ צריך לסכום i פעמים. כך עשינו. הוא מופיע ב $(X\ge k)$ עבור כל $1\le k\le i$.

<u>שימוש בנוסחא</u>: חישוב תוחלת של משתנה $G(p)$

יהי $X\sim G(p)$.

מתקיים $P(X\ge k)=q^{k-1}$ (כי דרושים $k-1$ כשלונות כדי לקבל לפחות k נסיונות).

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}\overset{1}{=}\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$$

1. סיכום טור גיאומטרי אינסופי.

<u>דוגמא</u>

כל סופגניה מכילה שוקלד בסיכוי 0.5 באופן ב"ת בכל סופגניה אחרת. רן אוכל סופגניות עד וכולל הסופגניה הראשונה שמכילה שוקולד. מהי תוחלת מספר הסופגניות שרן יאכל ?

<u>פתרון</u>

מתקיים $P(X\ge k)=0.5^{k-1}$

מתקיים $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)=\sum_{k=1}^{\infty}0.5^{k-1}=\frac{1}{0.5}=2$

<u>חישוב תוחלת של משתנה גיאומטרי</u> בדרך נוספת

במשתנה $X \sim G(p)$ סופרים את מספר הנסיונות עד קבלת הצלחה בסדרה של נסיונות ב"ת בעלי הסתברות p כל אחד.
אם הנסיון הראשון היה כשלון אז החל מאחרי כשלון זה, שוב סופרים את מספר הנסיונות עד קבלת הצלחה. זאת אומרת שמספר הנסיונות שאחריו שוב מתפלג $G(p)$.
מתקיים $E(X) = p + q(1 + E(X))$.

<u>הסבר</u>

בסיכוי p הנסיון הראשון היה הצלחה ובסיכוי q בזבזנו נסיון ושוב לאחריו תוחלת מספר הנסיונות היא $E(X)$.

בסך הכל נקבל $E(X) = p + q + qE(X)$ ולכן $(1-q)E(X) = 1$ ו $E(X) = \frac{1}{p}$.

<u>חישוב תוחלת של משתנה בינומי שלילי</u>

משתנה $NB(n,p)$ הוא סכום של n משתנים $G(p)$. לכל אחד מהמשתנים הגיאומטרים יש תוחלת של $\frac{1}{p}$. לכן למשתנה $NB(n,p)$ יש תוחלת של $\frac{n}{p}$.

<u>דוגמא</u>

מבצעים סדרה ב"ת של הטלות של קוביה תקינה עד שמקבלים 5 פעמים תוצאה של 6. תוחלת מספר ההטלות עד קבלת 5 פעמים תוצאה 6 מתפלג $NB\left(5, \frac{1}{6}\right)$ ולכן הוא בעל תוחלת $\frac{5}{1/6} = 30$.

<u>לינאריות התוחלת</u>

יהי X משתנה מקרי ויהי $Y = aX + b$ אז מתקיים $E(Y) = aE(X) + b$.

<u>הוכחה</u>

כמו בהוכחה שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות יהיו גם כאן ε - הנקודות במרחב המדגם.

$$E(Y) = E(aX+b) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)(aX+b)(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)aX(\varepsilon) + \sum_{\varepsilon} P(\varepsilon)b =$$

$$\overset{1}{=} a\sum_{\varepsilon}\left[X(\varepsilon)P(\varepsilon)\right] + b = aE(X) + b$$

1. מתקים $\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon) = 1$

<u>תרגיל</u>

תלמיד ניגש למבחן אמריקאי. במבחן יש 20 שאלות שלכל אחת מהן יש 4 אפשרויות. תשובה נכונה מזכה ב 5 נקודות ושגיאה מורידה 3 נקודות. נניח שאפשר לקבל ציון שלילי.

מהי תוחלת הציון של תלמיד שמנחש באקראי את התשובות ?

פתרון בדרך ראשונה

X - מספר התשובות הנכונות שיהיו לתלמיד. $X \sim Bin\left(20,\frac{1}{4}\right)$ לכן $E(X)=20\cdot\frac{1}{4}=5$.

Y - הציון של התלמיד. מתקיים $Y=5X-3(20-X)=8X-60$.

לפי לינאריות התוחלת מתקים $E(Y)=E(8X-60)=8\cdot5-60=-20$.

פתרון בדרך שניה

Y_i - הציון של התלמיד בשאלה בודדת.

$$E(Y_i)=\frac{1}{4}\cdot5+\frac{3}{4}\cdot(-3)=-1$$

$$Y=\sum_{i=1}^{20}Y_i \qquad \Rightarrow \qquad E(Y)=\sum_{i=1}^{20}E(Y_i)=20\cdot(-1)=-20$$

שאלות

נניח שבבחינה זו אני חייב להשיג ציון של לפחות 60 ונניח שאני יודע את הפתרון של 11 שאלות ואין לי כל מושג לגבי יתר השאלות.

מה על לעשות כדי להביא למכסימום את תוחלת הציון ?

מה עלי לעשות כדי להביא למכסימום את הסיכוי לעבור ?

תשובות

מבחינת התוחלת לא כדאי לי לנחש.

אבל אם אני חייב לעבור את הבחינה, אז עלי לנחש לפחות בשאלה אחת.

כמה לנחש ? לא נפתור כאן. אך אינטואיטיבית כדאי לנחש בשאלה אחת בדיוק. אם ננחש הרבה אז מכיון שהתוחלת היא שלילית אז נצפה לקבל מהניחושים מספר שלילי של נקודות.

טענה

אם משתנה X הוא סימטרי סביב 0 , זאת אומרת שמתקיים $P(X=x)=P(X=-x)$ עבור כל ערך x אז מתקים $E(X)=0$.

הוכחה

$$E(X)=\sum_{x}P(X=x)x=\sum_{x<0}P(X=x)x+\sum_{x>0}P(X=x)x=\sum_{x>0}P(X=x)(-x)+\sum_{x>0}P(X=x)x=0$$

<u>טענה</u>

אם משתנה Y הוא סימטרי סביב ערך b, אז התוחלת של המשתנה Y היא b.

<u>הוכחה</u>

נגדיר משתנה X המקיים $X=Y-b$. המשתנה X הוא סימטרי סביב 0. לכן תוחלתו היא 0.
מתקיים $E(Y)=E(X+b)=E(X)+b=b$.

<u>דוגמא</u>

יהי X משתנה מקרי המקיים $P(X=78)=P(X=82)=\frac{1}{6}$, $P(X=70)=P(X=90)=\frac{1}{3}$.

מצאו את התוחלת של X.

<u>פתרון</u>

המשתנה הוא סימטרי סביב 80. לכן התוחלת שלו היא 80.

<u>סוגיה</u>

בהגרלה משתתפים 100 אנשים. כל אחד מהם משלם לחברה שקל עבור השתתפותו. כל אחד מהמשתתפים בוחר מספר בין 1 ל 100. החברה מגרילה מספר בין 1 ל 100. מי שבחר במספר זה זוכה בקופה של 100 שקלים שהצטברה. אם כמה משתתפים בחרו במספר הנכון אז הם מתחלקים בקופה. אם אף אחד לא ניחש נכון אז הקופה נשארת אצל החברה.

האם המשחק כדאי מבחינת המשתתפים ? האם הוא כדאי מבחינת החברה ?

<u>תשובות</u>

החברה לא יכולה להפסיד אף לא שקל. אבל היא יכולה להרויח אם אף אחד לא ינחש נכון.

אם הבחירה של הפרטים היא ב"ת אז סיכוייה להרויח הם גבוהים : $\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}\cong\frac{1}{e}$.

כלומר הרווח של החברה הוא בקירוב $\frac{100}{e}$.

אם הפרטים יתאמו בינהם וכל אחד יבחר מספר שונה אז הם לא יפסידו.

בסוגיה זו יש פוטנציאל למפעל הפיס כי הוא יכול באמצעות המכונות הבוחרות מספרים להגביר את החזרות של המשתתפים.

אבל גם אם נגלה שיש חזרות- לא בטוח שזה נעשה ביוזמת המפעל. אולי האנשים שממלאים טפסים נוהגים להעדיף צירופים מסוימים.

איך ניתן לנסות לראות אם יש צירופים שנבחרים יותר מאחרים ?

יש פרסים קטנים שזוכים בהם הרבה אנשים. אם יש פרס שבו יש סיכויי זכיה של 3% ויש פרס אחר שבו יש סיכויי זכיה של 2% , אז נצפה שבראשון יזכו בקירוב פי 1.5 מבשני . חריגה גדולה מכך תלמד שיש צירופים שאנשים מעדיפים לבחור בהם.

<u>תוחלת מותנה</u>

תוחלת התוצאה של קוביה תקינה היא $\frac{1+6}{2}=3.5$. נניח שאומרים לכם שהתקבלה תוצאה גדולה מ- 2,

מהי כעת התוחלת של התוצאה ?

אינטואיטיבית זה $\frac{3+6}{2}$.

התוחלת המותנה היא התוחלת בהינתן איזשהו מאורע. איך נחשב אותה ?

נחשב את ההסתברויות המותנות לקבלת הערכים האפשריים ונחשב תוחלת לפי ההסתברויות המותנות האלה.

נניח שלגבי הקוביה ידוע ש $(X>2)$.

$$P(X=3|X>2)=\frac{P(X>2,X=3)}{P(X>2)}=\frac{P(X=3)}{P(X>2)}=\frac{1/6}{4/6}=\frac{1}{4}$$

באותה צורה יתקבלו ההסתברויות המותנות עבור כל אחד מהערכים האפשריים $\{3,4,5,6\}$.

מתקבל שההתפלגות המותנה היא $U[3,6]$ ובעלת תוחלת $\frac{3+6}{2}=4.5$.

<u>שאלה</u>

נתונים שני מטבעות. המטבע הראשון נופל על עץ בסיכוי $\frac{2}{3}$ והמטבע השני הוא הוגן. בוחרים באקראי בסיכוי שווה באחד המטבעות ומבצעים בו שתי הטלות. נניח שבשתי ההטלות קבלתי תוצאה זהה. מהי תוחלת מספר העצים ב 5 ההטלות הבאות ?

A - קבלתי שתי תוצאות זהות.

B - נבחר המטבע ההוגן.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}{0.5\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)+0.5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}$$

תוחלת מספר העצים ב 5 ההטלות הבאות היא

$$P(B|A)\cdot 5\cdot\frac{1}{2}+\left(1-P(B|A)\right)\cdot 5\cdot\frac{2}{3}$$

<u>תוחלת שלמה</u>

<u>שאלה</u>

יש לי מטבע הוגן (נותן תוצאות 0 ו 1) וקוביה תקינה (תוצאות 1 עד 6). אני בוחר באקראי בסיכוי שווה באחד מבינהם ומבצע 3 הטלות. מהי תוחלת מספר התוצאות 1 שאקבל ?

<u>תשובה</u>

אם אבחר במטבע אז התוחלת תהיה $3\cdot\frac{1}{2}$ ואם אבחר בקוביה אז התוחלת תהיה $3\cdot\frac{1}{6}$.

יהי X - מספר התוצאות של 1 .

יהי Y - אינדיקטור לכך שאקבל מטבע. $(Y=1)$ אומר שקבלתי מטבע ו $(Y=0)$ שקבלתי קוביה.

$$E(X)=\frac{1}{2}E(X|Y=1)+\frac{1}{2}E(X|Y=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}=1$$

השתמשנו בחישוב של תוחלת שלמה כאשר עוברים על כל הערכים האפשריים של Y ומשקללים את התוחלת של X .

<u>דוגמא נוספת</u>

בכד א' יש 4 כדורים כחולים ו 2 כדורים ירוקים.

בכד ב' יש 4 כדורים כחולים ו 4 כדורים ירוקים.

אני בוחר בסיכוי $\frac{2}{3}$ בכד א' ובסיכוי של $\frac{1}{3}$ בכד ב' ומוציא מהכד שני כדורים ללא החזרה.

מהי תוחלת מספר הכדורים הכחולים שאוציא ?

<u>פתרון</u>

אם נבחר בכד הראשון אז כל כדור שיוצא יהיה כחול בסיכוי $\frac{4}{4+2}$ ולכן תוחלת מספר הכדורים הכחולים שיצאו תהיה $2\cdot\frac{4}{4+2}$.

אם נבחר בכד השני אז כל כדור שיוצא יהיה כחול בסיכוי $\frac{4}{4+4}$ ולכן תוחלת מספר הכדורים הכחולים שיצאו תהיה $2\cdot\frac{4}{4+4}$.

לפי חישוב של תוחלת שלמה, תוחלת מספר הכדורים הכחולים שיצאו היא $\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{4}{4+2}+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{4}{4+4}$.

<u>הערות</u>

אם מוציאים את הכדורים ללא החזרה אז אם בוחרים בכד הראשון אז מספר הכדורים הכחולים שיצאו מתפלג $HG(2;4,2)$. יש תלות בין הצבע של הכדור הראשון שמוצא לבין הצבע של הכדור השני שמוצא. אבל בכל מקרה תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות.

<u>גישה נוספת להצגת תוחלת שלמה</u>

יהיו X,Y זוג משתנים מקריים, אז מתקיים $E(X)=E\big(E(X|Y)\big)$.

עבור כל ערך אפשרי של Y קיימת תוחלת מותנה של X. התוחלת של X היא השקלול של תוחלות אלה.

<u>דוגמא</u>

מטילים קוביה תקינה. יהי Y – תוצאת הקוביה. אם $(Y=y)$ אז מטילים y מטבעות שכל אחד מהם נותן "עץ" בסיכוי חצי. יהי X – מספר העצים שנקבל.

בהינתן $(Y=y)$ התוחלת של X היא $0.5y$. מתקיים $E(0.5Y)=0.5E(Y)=0.5\cdot 3.5=1.75$.

<u>תוחלת של פונקציה של משתנה</u> (ללא הוכחה)

תהי $g(X)$ פונקציה של משתנה X , אז מתקיים $E\big(g(X)\big)=\sum P(X=x)g(X)$.

<u>דוגמא</u>

נניח שמתקיים $P(X=0)=\frac{1}{6}$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$, $P(X=5)=\frac{1}{2}$. מהו $E\left(X^3\right)$?

<u>תשובה</u>

$$E\left(X^3\right)=\frac{1}{6}\cdot 0^3+\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 5^3$$

<u>מאפיינים אחרים להתפלגות</u>

שכיח: הערך שמתקבל בהסתברות הגבוהה ביותר.

הערה

יתכן שיותר מערך אחד יתקבל בהסתברות מכסימלית.

חציון: ערך שבהסתברות של לפחות חצי נקבל ערך לא גדול ממנו ובהסתברות של לפחות חצי נקבל ערך שלא קטן ממנו.
