# תוחלת של משתנים רציפים

התוחלת של משתנה רציף בהחלט נתונה על-ידי הנוסחא:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot x \, dx$$

כאשר $f_X(x)$ אנלוגי להסתברות לקבלת ערך במקרה הבדיד. ככל ש $f_X(x)$ יותר גבוה כך גדלה הסבירות לקבל ערך קרוב ל $x$.

**דוגמא**

יהי $X \sim U(a,b)$. מהו $E(X)$?

**פתרון**

מתקיים $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ עבור כל $a \le x \le b$. עבור ערכי $x$ אחרים פונקצית ההסתברות המצטברת היא קבועה לסירוגין.

לכן מתקיים עבור $a \le x \le b$: $f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{b-a}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, x\, dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x \, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x \, dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

**הערה**

התוצאה הזאת היא סבירה כי המשתנה סימטרי סביב $\frac{a+b}{2}$

סוגיה

נתון משתנה מקרי בעל צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases} cx & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את $c$.
ב. מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת.
ג. מצאו את $E(X)$.

פתרון

א. האינטגרל על פונקצית הצפיפות על כל הישר הוא 1.
זה נכון תמיד. כאן פונקצית הצפיפות שונה מ 0 רק
בין 0 ל 1. לכן מתקיים $\int_0^1 f_X(x)\,dx=1$.

לכן $\int_0^1 cx\,dx=1$, לכן $c\int_0^1 x\,dx=1$, לכן $c\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1$,

לכן $0.5c=1$ ולכן $c=2$. לכן עבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים
$f_X(x)=2x$.

ב. עבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים

$$F_X(x)=\int_0^x 2t\,dt=\left[t^2\right]_0^x=x^2$$

לכן נקבל

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

ג.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,x\,dx=\int_0^1 f_X(x)\cdot x\,dx=\int_0^1 2x\cdot x\,dx=$$

$$=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

<u>הערה</u>

הצפיפות אינה סימטרית סביב 0.5, היא גדולה יותר עבור ערכים גדולים מ 0.5. לכן באופן טבעי התוחלת גדולה מ 0.5.

<u>נוסחת הזנב</u>

למדנו על נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$$

ישנה הכללה של נוסחה זו עבור משתנים שמקבלים ערכים אי שליליים, לפי הכללה זו שלא נוכיח אותה מתקיים:

$$E(X)=\int_0^{\infty}(1-F_X(x))\,dx$$

<u>חישוב תוחלת של משתנה $exp(\lambda)$ בדרך הישירה</u>

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,x\,dx=\int_0^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}x\,dx=$$

$$\overset{1}{=}-e^{-\lambda x}\cdot x\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=0+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\cdot 1=\frac{1}{\lambda}$$

1. עשינו אינטגרציה בחלקים.
2. $\int_0^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx$ הוא אינטגרל על פונקציית הצפיפות של משתנה

(ה)אקספ. אינטגרל של פונקצית צפיפות על כל התחום תמיד שווה ל 1.

<u>חישוב תוחלת של משתנה (ה)אקספ בעזרת נוסחת הזנב</u>

$$E(X)=\int_0^\infty (1-F_X(x))\,dx=\int_0^\infty 1-(1-e^{-\lambda x})\,dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$$

את האינטגרל הנ"ל כבר חישבנו ויצא $\frac{1}{\lambda}$.

<u>תוחלת של פונקציה</u>

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי רציף בהחלט נתונה ע"י

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot g(x)\,dx$$

שלומי