

משתנים מקריים 13-מ'נ'צ"ס

עצ ככה עסקנו במשתנים מקריים ופסיתכנו את ההסתברויות
 שהם מקבלים ערכים שונים. כעת נסתכל על משתנים
 שיש להם יותר ממאפיין אחד, למשל גובה ומשקל.
 כל צירוף של גובה מסוים עם משקל מסוים מתקבל
 בהסתברות מסוימת. אפשר ליצור טבלה עם צירופי
 ערכים שונים, ודברך הטבלה לביטוי ההסתברות לקחת
 צירופים שונים.

$X \backslash Y$	0	1	4	
1	0,1	0,2	0	0,3
3	0,3	0	0,4	0,7
	0,4	0,2	0,4	

צונטל

כך למשל מתקיים $P(X=3, Y=0) = 0,3$

דגשנות הטבלה מתאימות ההתבטאויות השאליות שכן

ההתבטאויות הנפרדות של כל אחד מהמשתנים.

כל משתנה גדוהן מתקבלת עם-יצי' סכום של שורה/עמודה.

לפעמים יש אופן סוג ערכים אפשריים לצייריפים, אך רשמים

קיימים בלע"ם להסתברויות, גם במקרים אחרים לפעמים

כותבים קטנים כללים.

צומט / 3
 יש 3 כובים 1 3 כבים. כל כוב נצק אדניק כב אחר
 (כולם קטנו אור). יש אי תאית גין פמאורצוג של
 כגית כבולמ מסוימם אכב מסומ.

X - מספר הכבולמ שיכמו אכב פמאור.
 Y - מספר הכבים שקדם לתאית כבול אחר.

X \ Y	1	2	3	
0	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2 \binom{3}{2}}{3^3}$	0	$\frac{8}{27}$
1	0	$\frac{\binom{3}{1} \cdot 2}{3^3}$	$\frac{3!}{3^3}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1}}{3^3}$	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{3^3}$	0	0	$\frac{1}{27}$
	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	

פמאור פמאור פמאור של X פמאור ג'נומ'ג $(3, \frac{1}{3})$
 כי כל כוב נכס אכב פמאור קטנו $\frac{1}{3}$ קאון קת
 קכולמ פמאור.

אם $P(X=1, Y=1) = 0$ כי אם דבר הפולסון יש כבוד

אחד, אז אם יתכן שיפיה דצ'וק כז אחד תבוא.

אם $P(X=0, Y=2) = \frac{2 \binom{2}{2}}{3^3}$: מרחק פמזים פול גאול $\frac{2}{3}$.

כז שקב הפולסון אם ופ'ו ככוכים ו'פ'ו שני ככוכים

תבואים, זכ'ק אדואר כז מקין שני הככוכים האחרים שלפ'ו

נכלם שני ככוכים וזכ'ק אדואר את שני הככוכים.

הככוכים הא'ים יכלם אם הא'ים.

כז שיתק'ים $(X=1, Y=3)$ זכ'ק אחלק את אלושית הככוכים

ה'ן אלושית הככוכים, כק שיכלם דצ'וק כבוד אחד אכלם כז.

אי תכלת ה'ן זכ'ק משתנים מקריים

זכ'ק משתנים מקריים (X, Y) נקס'ים דת אם אדואר אם

(X, Y) מתק'ים $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$, יש כולן

הרדקה א פזזרת ה'ו תכלת ה'ן מאווע'ת. זכ'ק שם

זכ'ק במאווע'ת $(X=x), (Y=y)$ יפ'ו דת.

דכואט/האדיוע שנתנו, אפשר אדקדוקין שאן או תכלת.

'ש דתק האילע אכס'ים, אם $P(X=x) > 0$ ו $P(Y=y) > 0$

4

קראו $P(X=x, Y=y) = 0$ כל x, y אחרים

הסתברות (x, y) כללית

אם יש (x, y) שבהם יש סיכויים שונים

שונים אין סיכויים כלל אין כללית.

הסתברות $X+Y=2$ מהסתברות $P(X=1, Y=1)$

	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	

סתברות

הסתברות $X+Y=2$ מהסתברות $P(X=1, Y=1)$

$$P(X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{36}$$

$$P(X+Y=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = \frac{2}{36}$$

$$P(X+Y=4) = \frac{3}{36}$$

$$P(X+Y=5) = \frac{1}{36}$$

$$P(X+Y=6) = \frac{2}{36}$$

4

$$P(X+Y=k) = \frac{6 - |7-k|}{36}$$

כאן כלל

לקחת סכום 7 יש 3 זוגות אפשריים, כלל מתחילת
מחקר 7 יורגס מסר הזוגות האפשריים.

סכום שתגים פטאלוט ק"ג

X, Y זוג שתגים מקיים $X \sim P(\lambda), Y \sim P(\mu)$, X, Y זוג.

$$P(Z=2) = \sum_{x=0}^2 P(X=x, Y=2-x) = \sum_{x=0}^2 P(X=x) \cdot P(Y=2-x) =$$

$\left(\begin{matrix} \text{יכול לקום} \\ \text{בסך עקב} \\ \text{2 זוגות} \end{matrix} \right)$
 $\left(\begin{matrix} \text{פזיק משל} \\ \text{2 מסר} \end{matrix} \right)$
 $\left(\begin{matrix} \text{זוג} \\ \text{א/כ} \end{matrix} \right)$

$$= \sum_{x=0}^2 e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{2-x}}{(2-x)!} =$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{2!} \sum_{x=0}^2 \frac{2!}{x!(2-x)!} \cdot \lambda^x \cdot \mu^{2-x} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{2!} \sum_{x=0}^2 \binom{2}{x} \cdot \lambda^x \cdot \mu^{2-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{2!} (\lambda+\mu)^2$$

$P(\lambda+\mu)$ קחת מהסכום

התפלגות מוחלטת

יש התפלגות של משתנה קרינתי מאותו אלו קרינתי אחרים
 של משתנה אחר

משתנה אחר של אותו הקרינתי של קרינתי אחרים

מהי ההתפלגות של X קרינתי שהסכום הוא 3?

$$P(X=1|Z=3) = \frac{P(X=1, Z=3)}{P(Z=3)} = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Z=3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{2}{36}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2|Z=3) = \frac{1}{2}$$

עם קרינתי (Z=3) בהתפלגות של X היא אחרים

קרינתי 1 ו-2 $U[1,2]$

ההתפלגות המוחלטת משותפת

$$X|Z=2 \sim$$

$$X|Z=3 \sim U[1,2]$$

דוגמה

$Z = X + Y$, " X, Y , $Y \sim \text{Bin}(m, p)$, $X \sim \text{Bin}(h, p)$

כאשר Z היא ההתפלגות של Z

האם Z היא ההתפלגות של X דהיינו $Z = X$?

פתרון

כאשר Z הוא סכום של $h+m$ ניסויים דו-צדדיים ההתפלגות

$Z \sim \text{Bin}(h+m, p)$ עם p כש Z הוא סכום

$$P(Z=z) = \binom{h+m}{z} \cdot p^z (1-p)^{h+m-z}$$

$$P(X=x | Z=z) = \frac{P(X=x, Z=z)}{P(Z=z)} = \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(Z=z)} = ?$$

$$= \frac{P(X=x) \cdot P(Y=z-x)}{P(Z=z)}$$

(עדיין משתנה Z משתנה Y ו- X הם Z ו- Y דו-צדדיים
כן תמיד X)

$$= \frac{\binom{h}{x} \cdot p^x (1-p)^{h-x} \cdot \binom{m}{z-x} \cdot p^{z-x} (1-p)^{m-(z-x)}}{\binom{h+m}{z} \cdot p^z (1-p)^{h+m-z}}$$

$$= \frac{\binom{h}{x} \binom{m}{z-x}}{\binom{h+m}{z}}$$

קראו ההתפלגות מוצגת בהצגה $HG(z; h, m)$

(את זהות ההתפלגות פשוט לריכסם עזרו לכם להצטרף)

מבין ה הנסיונות שמייצג המשתנה X ! מה הנסיונות שמייצג המשתנה Y .

סוגיה

$Z = X + Y$, $X \sim G(p)$, $Y \sim G(p)$, X, Y הם זוגות

א. אילו מתפלג Z ?

ב. מהי ההתפלגות של X בהינתן $Z=z$?

פתרון א. $Z \sim MB(2, p)$

X - מספר הנסיונות עד קריסת הבלוזה השנייה.

Y - מספר הנסיונות עד קריסת הבלוזה השנייה.

עד קריסת הבלוזה השנייה.

Z - מספר הנסיונות עד קריסת שתי הבלוזות.

אם נאמר שהנסיונות שמייצג Y דאם אולי הנסיונות

שמייצג X , אולם מספר הנסיונות עד קריסת שתי הבלוזות

$$P(X=x | Z=z) = \frac{P(X=x, Z=z)}{P(Z=z)} = \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(Z=z)} = ?$$

(אולי, עדין לא משתנה)
שהיא זוגית X, Y

כ"א תלמיד

$$\frac{1}{\frac{p(x=x) \cdot p(y=2-x)}{p(z=2)}} = \frac{p \cdot q^{x-1} \cdot p \cdot q^{2-x-1}}{\binom{2-1}{1} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{2-2}} = \frac{1}{2-1}$$

(התפלגות ג'וסיט שלילית)

ואכן ההתפלגות המתקבלת היא $U[1, 2-1]$.
 (כלומר יוצא שב"ו Z נמוכה עם קשר שתי התפלגויות
 שלם אקדמית שונות של מספר הנמוכה בין X ל- Y יש
 אולם המתכוונת).

סוגיה
 $Z = \max\{X, Y\}$. $X, Y \sim U[1, 6]$ ד"ר.

א"ק מתפלג Z ?

אנטינטואטיביות Z נראה אקראי צרכים גזורים יותר

מאשר קטנים יותר דתחם האפשרי.

$$p(z=2) = p(z \leq 2) - p(z < 2) = p(z \leq 2) - p(z \leq 2-1) =$$

(המכפלים קטן אולם
 ממשהו שבה דבר ששניהם
 קטנים אולם מאות גזום)

(קטן משלם שבה קטן
 אלו שווה מהפנים אטנו)

$$= p(x \leq 2, y \leq 2) - p(x \leq 2-1, y \leq 2-1) =$$

$$= p(x \leq 2) \cdot p(y \leq 2) - p(x \leq 2-1) \cdot p(y \leq 2-1)$$

(כ"א תלמיד)

$$= \left(\frac{2}{6}\right)^2 - \left(\frac{2-1}{6}\right)^2 = \frac{22-1}{36}$$

(כ"א תלמיד)

$$P(Z=1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{36} = \frac{1}{36} \quad \text{כך אטא}$$

(אנחה צ'ליבים אקרא אא דערק 1 כ'י אהמכס'אמ
) י'יה אוא א 1.

$$P(Z=5) = \frac{2 \cdot 5 - 1}{36} = \frac{9}{36}$$

(אן י'י א'אר צ'יאבס, אאנ צ'ליק אקרא אא דערק
5, ואג'י האר י'י א'אר.)

$$P(Z=6) = \frac{2 \cdot 6 - 1}{36} = \frac{11}{36} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(כ'י אהמכס'אמ א'י י'יה אוא א 6, צ'ליבים
א'רמ א'ב'א קאנ'א מ 6.)

מ'נ'ש משתנים מקב"ם 3-מ'נ'ז'ים

משתנה מקב"ם 3-מ'נ'ז'י (x, y) הוא פונקציה ממרחב המצבים
 לקבוצת ערכים 3-מ'נ'ז'ים. פקודיטלר הבאסונר מייצגת
 את הערכים האפשריים של x והשניה את הערכים של y .
 כל צירוף ערכים של (x, y) מתקדם דפסטרקורט ששאר
 עסכים הפפסטרקוריות של פנקודות פחותאיות אליו.
 ניתן לממש כל משתנה 3-מ'נ'ז'י עם-יז'י מרחב מצבים
 שבו כל נקודה מייצגת צירוף ערכים אפשריים של זוג
 פמשתנים, כגון שלכל צירוף יש נקודה אחת שונה.
 מפעמים ניתן לממש אותו גם דזרכים אחרות.

צומטל
 את $[2, 1] \sim x$ ו $[1, 4] \sim y$ אז ניתן לממש משתנה
 3-מ'נ'ז'י (x, y) עם-יז'י מרחב מצבים שבו 4 נקודות
 שוות פפסטרקוריות. אגלי פמשתנר x , אם אחז משני
 הערכים 1 ו 2 יותלמו שתי נקודות, ואגלי פמשתנר y ,
 אם אחז מפרערכים 3, 2, 1, 4 תולטם נקודה אחת.
 אגל כגון פמשתנר (x, y) יפ'ו תלסו"ים, כי

קולות ערב מסוים על-ידי פשתנה ז בקר הכתובה
ערב מסוים של פשתנה א, אם נכונה למחש
זו שתנאים מקי"ם (ז,א) דת"י תלמי"ם, אז נצדק
למדה מצום זכא יוצי.

סביות של שתנאים מקי"ם

הפמשק נעסק גם דסביות אינסופיות של שתנאים
מקי"ם, דסביות שתנאים כל אידך פטל משנה
מקי"ם.

קדושה של שתנאים מקי"ם תקסו ד"ג אם כל
ז'רוא ערבים שמקראים משתנים שדברה מתקדם
דהסתדרות שאלו אמכפת בהסתדרות של
פשתנים אקד את הערבים השונים, באי תלות
אחרת שקלת ערבים מסוים על-ידי קדושת משתנים
לא משנה את בהסתדרות של משתנים מקי"ם
אתרים אקד ערבים מסוים.

קדושת משתנים מקי"ם תקסו ד"ג קדושת, אם כל
ז'רוא משתנים מהסדרה הם ד"ג.

בהצטרות האלה לא אי תלוו ואל אי תלוו קצות
 חלות על סדרת משתנים אינסופית כמו גם על
 קדושת משתנים סופית.

כדי לממש סדרה של משתנים מקי"ם לבק אפסטים
 אפסטים דמיון מצטט דעל מספר גזים של קבוצות.
 אלו נכנסו למסלול של כמה גזים פטל לבק אפסטים.
 אלו יש מקי"ם פיט"ם שרובם צ"א אפסטים דמיון
 דעל מספר קטן של קבוצות.

$\frac{3.14159}{2\pi}$ פטל סדרת משתנים מקי"ם שרוב
 המשתנים הם תלויים טאן שכל משתנה פטל
 פחות של π , אז צ"א דמיון פחמים שרצותו
 ניתן לממש את π , כצ"א לממש את כל הפיננסי.

שאוני