

משתנים מקריים ב-3 מ'מ'ים רצופים

ניתן להגדיר פונקציה בסטוריות מילטרות ב-3 מ'מ'ים.

$F_{X,Y}(x,y)$  ב-3 המספריות מתקיים הצורה  $(x \leq x, y \leq y)$ .

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ . זהו תפקידם של כל סוגי המשתנים.

אם יש מספר סופי או קטן מנה של ערכי  $(x,y)$  אפשריים של

המשתנה ה-3-מ'מ'י הפול-צ'י. אם  $F_{X,Y}(x,y)$  רצופה לכל  $(x,y)$  של המשתנה הפול-צ'י-3-מ'מ'י רצופה.

אם קיימת פונקציה  $f_{X,Y}$  כך שכל  $x,y$ :

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(z,w) dz dw$$

של המשתנה הפול-צ'י קרויה פונקציה.

קמ"ב בצורה המסתורית של מלווה או של תחום אחר לאינטגרל

של פונקציה רצופה לתחום זה.  $P(A) = \int_A f_{X,Y}(x,y) dx dy$

כל משתני מקריים  $X, Y$  נקראים תלויים אם כל  $x, y$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

או לכל זוג קבוצות  $A, B$ :  $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

הצורה אם מתקיים לכל  $x, y$ :  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

אם יש משתנים  $X, Y$  הם תלויים. אולם אין זה תנאי

הכרחי כי קבוצת ערכיהם של  $X, Y$  רצופה או מספרית. נקראת מח' מלאה אם האינטגרלים

כמו שקיבלנו מהתרגום נותן הפונקציה המשותפת:

$$f_{X|Y \leq y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(הסיכוי  $(Y \leq y)$  וכן  $(X \leq x)$  ונתון  $(Y \leq y)$  ונתון  $(Y \leq y)$  ונתון  $(Y \leq y)$ )

כך גם אם  $A, B$  אזי

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

נותן הפונקציה המשותפת

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

אם  $Z = X+Y$ , "  $X, Y$ ,  $Y \sim \text{exp}(\lambda)$ ,  $X \sim \text{exp}(\lambda)$

כמה שאלות הנוגעות ל  $Z$  ?  
 מה הפונקציה המשותפת  $X$  ונתון  $Z$  ?

פתרון

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{X,Y}(x, z-x) dx = \int_0^z f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$$

$$= \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(z-x)} dx = \int_0^z \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z} dx =$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z} dx = z \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda z}$$

1. סיכוי של הפונקציה המשותפת של  $X$  ונתון  $Z$  מהי פונקציה המשותפת של  $X$  ונתון  $Z$  ?

2. הצביות הפשוטות שלו מכילות הצביות האלויות

3. אינטגרלם של קרוז  $e^{-kx}$  קטנה עין 0 ו 2.

$$f_{x|z=2} = \frac{f_{x,z}(x,2)}{f_z(2)} = \frac{f_{x,y}(x,2-x)}{f_z(2)} =$$


---


$$= \frac{f_x(x) \cdot f_y(2-x)}{f_z(2)} = \frac{\eta \cdot e^{-\eta x} \cdot \eta \cdot e^{-\eta(2-x)}}{\eta^2 \cdot 2 \cdot e^{-\eta 2}} = \frac{1}{2}$$

קראנו שהצביות פשוטות הם של משתנה  $U(0,2)$ .

התבטאת בסיים של משתנים מקי"ם אחידים  
 $z = x+y$ ,  $y \sim U(0,1)$ ,  $x \sim U(0,1)$ , ר"ל

בסיים מקראם צינים בין 0 ו 2.

נסתכלם על נקיבה  $0 \leq z \leq 1$ . מפה  $f_z(z)$  ?

$$f_z(z) = f_{x+y}(z) = \int_0^z f_{x,y}(x, z-x) dx =$$

$$= \int_0^z f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx = \int_0^z 1 \cdot 1 dx = z$$

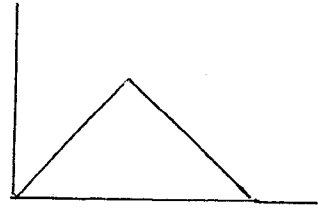
נסתכלם על נקיבה  $1 \leq z \leq 2$

$$f_z(z) = f_{x+y}(z) = \int_{x=z-1}^1 f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx =$$

$$= \int_{z-1}^1 1 \cdot 1 dx = 2-z$$

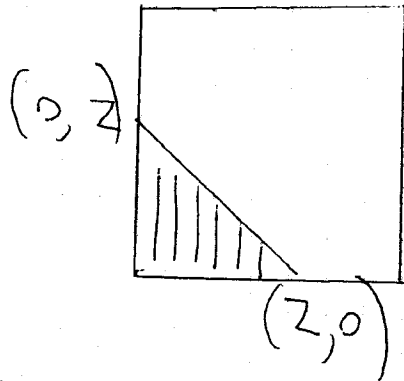
1.  $x$  אלו יבואם אה"יג גבוים 1 אלק הוא עין  
 צי"ק אה"יג שורה אבהות 2-1 כי  $y$  אלו  
 יבואם אה"יג גבוים 1 אלו צי"ק אה"יג אלו

$$f_2(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{אלוה} \end{cases}$$



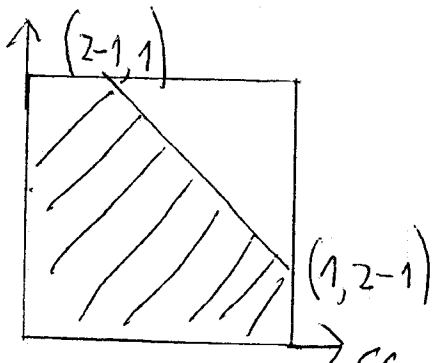
בתרון גאומטרי אלוה שלם

כל הפונקציות  $(x, y)$  מתפלגות אלוה קרוצ.  
 כל אלוה יש הסתברות פרובאביליטי שלם.  
 כולן שלם קרוצ פטל 1. אכן ההסתברות של אלוה אלוה  
 קרוצ שלם.  
 נסתכל על פונקציה שלם שלם  $z$  אלוה  $0 \leq z \leq 1$ :



צב'ק עזר את שלם פונקציה שלם אלוה  $\frac{z^2}{2}$  ושלם

$$F_2(z) = \frac{z^2}{2}$$



כעת נסתכל על עק  $1 < z \leq 2$ :

השלם פונקציה שלם פונקציה שלם פונקציה שלם פונקציה שלם פונקציה שלם

$$1 - \frac{(1-(z-1))(1-(z-1))}{2} = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

מתק"ם

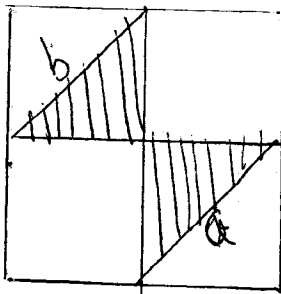
$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & 1 \leq z \leq 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

רק דהתפלגות אחידה יכולנו לבצע קטטה פניאומטרית  
דהתפלגות אחידה, בהסתברות לא הומוגניות לטוב

שאלה

קוארטים באופן דתי שתי נקודות קטע (0,1) המתפלגות  
(0,1)ט כפי אחרת. נזכרים אופיה קטעים - הקטע  
סקין 0 סמנטיקה, הקטע בין המינמליה סמכסמליה והקטע  
סקין המכסמליה 0.1  
מהי ההסתברות שמעטת הקטעים ניתן ליצור משלים?

פתרון  
ניתן ליצור משלים קאם אם אחד משתי הקטעים על  
גזום מסכמ סני האחרים.



הטלח המחוק הפטו במקורו.  
משמעות באילוסורים שהקטע סקין  
0 סמנמיה והקטע סקין המכסמליה  
א 1 לא יבאו גזום'ם מסני האחרים  
פלא אחרת מקין הנקודה x ו y קטעה מ 0.5 מאחרת  
גזום'ם מ 0.5. קטלט לב קא עיני לטני. קכק שהנקודה  
(x,y) פטל דלדוע השמליה פעסיון או דלדוע פ'ימני התחבין.

יש גם אוילוס גטל יתק"ם  $5 < x < y$ , נבדק אם ל"י

ג"ט"ו ג"ש"א גטל יתק"ם  $5 < x < y$ , נבדק אם ל"י ג"ט"ו

ג"ש"ב ג"ש"ב ק"מ"ו ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב  
ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב  
ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב ג"ש"ב

ג"ש"ב