שלומי

התכנסויות

התכנסות בהתפלגות

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים בעלי פונקציות התפלגות מצטברות $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ (זאת אומרת שלמשתנה X_n יש פונקצית התפלגות מצטברת F_n).

נגיד שסדרת המשתנים שואפת בהתפלגות למשתנה X אם מתקיים $\lim F_{X_n}(x)=F_X(x)$ עבור כל נקודה x שאיננה נקודת אי רציפות של פונקצית ההתפלגות המצטברת F_X.

דוגמא

אם $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים שמתפלגים $U(0,1)$, אז הסדרה שואפת בהתפלגות למשתנה X שגם הוא מתפלג $U(0,1)$.

הסבר

לכל המשתנים שבסדרה וגם למשתנה X יש את אותה פונקצית התפלגות מצטברת.

הערה

התכנסות בהתפלגות לא אומרת שהמשתנה שאליו מתכנסים יקבל ערך קרוב לערכם של המשתנים שבסדרה.
למשל אם סדרת המשתנים המקריים היא סדרת משתנים ב"ת, אז בוודאי שיהיו אין סוף משתנים מהסדרה שמקבלים ערך רחוק מכל משתנה שמתפלג $U(0,1)$.

דוגמא 1

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים. נניח ש $X_n \sim U\left(0,\frac{1}{n}\right)$
(אחיד רציף), אז סדרת המשתנים שואפת בהתפלגות
למשתנה המנוון המקיים $P(X=0)=1$.

הסבר

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X_n היא

$$F_{X_n}(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ nx & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 1 & x\ge \frac{1}{n} \end{cases}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של X היא

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}$$

עבור כל $x<0$ מתקיים לכל n $F_{X_n}(x)=0$
עבור $x=0$ מתקיים $F_{X_n}(0)=0$ לכל n.
עבור $x=0$ מתקיים $F_X(0)=1$.
עבור כל $x>0$ מתקיים $F_X(x)=1$. עבור $x>0$ נתון
מתקיים עבור $n>\frac{1}{x}$ ש $F_{X_n}(x)=1$ (עבור $n>\frac{1}{x}$
מתקיים $\frac{1}{n}<x$). לכן בכל נקודה על הישר חוץ מהנקודה 0

מתקיים $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)=F_X(x)$. אלא ס היא נקודת אי

רציפות של F_X . בהגדרת התכנסות בהתפלגות הרשנו

שבנקודות אי הרציפות של F_X לא תהיה התכנסות.

דרשנו רק שביתר תהיה התכנסות,

<u>דוגמא</u>

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים. נניח שעבור כל

n : $X_n \sim U(n,n+1)$.

נטען שסדרת המשתנים המקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת

בהתפלגות לשום משתנה מקרי.

<u>הוכחה</u>

עבור כל x ממשי נתון, עבור כל $x<n$ מתקיים $P(X_n>x)=1$

או $P(X_n\le x)=0$. לכן $\lim_{n\to\infty} P(X_n\le x)=0$ לכל x .

אבל עבור כל משתנה מקרי X מתקיים $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$,

ולכן למשל קיים a כך שעבור כל $x>a$: $F_X(x)>0.5$

התכנסות בהסתברות

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים. אם מתקיים עבור משתנה מקרי X עבור כל $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\varepsilon)=0$ אז

נגיד שהסדרה $\{X_n\}$ מתכנסת בהסתברות למשתנה X.

דוגמא

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים שמקיימים שעבור כל $n\geq 1$

מתקיים $P(X_n=1)=\frac{1}{n}$, $P(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$

אז סדרת המשתנים שואפת בהסתברות למשתנה X

המקיים $P(X=0)=1$.

הסבר

רק בסיכוי $\frac{1}{n}$ מתקיים $(0\neq X_n)$ ולכן רק בסיכוי $\frac{1}{n}$

מתקיים $(X_n\neq X)$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} P(X_n\neq X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

טענה

יתכן שסדרת משתנים מקריים תתכנס בהתפלגות למשתנה מקרי X, אך לא תתכנס למשתנה X בהסתברות.

נתן דוגמא לכך.

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים ב"ת המקיימים

$P(X_n=0)=P(X_n=1)=0.5$.

סדרת המשתנים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת בהתפלגות למשתנה X המקיים

$$P(X=0)=P(X=1)=0.5$$

(לכל המשתנים המקריים שבסדרה יש אותה פונקצית הסתברות מצטברת כמו שלו).

אם X מקבל את הערך 0 אז כל משתנה שבסדרה רחוק ממנו ב-1 בסיכוי חצי. אם X מקבל את הערך 1 אז גם לגבי כל X_n הוא רחוק ממנו ב-1 בסיכוי חצי.
לכן סדרת המשתנים לא שואפת בהסתברות ל-X.

התכנסות בהסתברות 1

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים.
נאמר שסדרת המשתנים שואפת למשתנה X בהסתברות 1
אם"ם עבור כל $\varepsilon>0$ נתון מספר המשתנים שמקיימים $|X_n-X|>\varepsilon$ הוא סופי, זאת אומרת שבהסתברות 1 החל ממקום מסוים (שיכול להיות משתנה), מתקיים $|X_n-X|\le\varepsilon$ עבור כל n.

דוגמא

תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים המקיימים

$$P(X_n=0)=1-\frac{1}{n^2}, \quad P(X_n=1)=\frac{1}{n^2}$$

אז סדרת המשתנים שואפת בהסתברות 1 למשתנה המנוון המקיים $P(X=0)=1$.

הסבר

יהי A_n המאורע $(X_n\neq 0)$. מתקיים

$\infty > \sum \frac{1}{n^2} = \sum P(A_n)$ ולכן לפי הלמה של בורל קנטלי

בהסתברות 1 רק מספר סופי מבין המאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

יתרחשו.

<u>טענה</u>

נסתכל על סדרת משתנים ב"ת $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימים

$$P(X_n=1)=\frac{1}{n} \quad , \quad P(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$$

כבר ראינו שסדרת המשתנים שואפת בהסתברות למשתנה המנוון X המקיים $P(X=0)=1$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ והמאורעות $(X_n=1)$

הם ב"ת. לכן בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n=1)$, ואין סוף פעמים יתקיים $(|X_n-X|\geq 1)$.

<u>ניסוח פורמלי יותר של התכנסות בהסתברות 1</u>

סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת בהסתברות 1 למשתנה X אמ"מ מתקיים עבור כל $\varepsilon>0$: $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(|X_k-X|>\varepsilon)\right)=0$

<u>הסבר</u>

אם מתקיים עבור איזשהו $\varepsilon>0$ שאין סוף ערכי $(|X_k-X|>\varepsilon)$

אז עבור כל n יתרחש האיחוד $\bigcup_{k=n}^{\infty}(|X_k-X|>\varepsilon)$.

אם רק עבור מספר סופי של ערכי k יתקיים $(|x_k-x|>\varepsilon)$
אז יהיו ערכי n כך ש $\bigcup_{k=n}^{\infty}(|x_k-x|>\varepsilon)$ לא יתרחש
ולכן החיתוך לא יתרחש.