

משתנים מקריים רציפים

יתכן ששתינה יקראו ערך מסוים, למרות שהערך פצה מתקבל
 דהסתברות אפס אלא שקטעים יש הסתברות חיובית.
 צומא לכך פיא שתינה שמונז את זמן הפגעה של
 המקום, כאשר אני יכול להפגוע. דכל זמן שלן שמונה
 ארשע. אפילו אם כל נקודה מתקבלת דהסתברות
 אפס, יכול קטע של ערכים להתקבל דהסתברות חיובית.
 אמרנו דתתייחס בפנסטר שלמספר בן מנה של מאותיות
 זרים יש הסתברות שאלה אפסים דהסתברות של
 פמאותיות. אלא קטע אנו מספר בן מנה של נקודות.
 קטע פט רצף של נקודות. אי אפשר למנות את
 הנקודות של קטע.

נק אי אפשר לתאר התפלגות על-ידי מתן רשימה
 של הסתברויות, אלא ניתן לתאר את ההסתברויות
 הפונקציות עז כל נקודה קשה.

נזכר $F_X(x)$ - זו ההסתברות הפונקציה עז הנקודה x .

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$P(a < X \leq b) =$$

מתק"ם

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

משתנה מקרי נקטל משתנה מקרי רציף אם $F_X(x)$ הוא פונקציה רציפה.

משתנה מקרי יקטל משתנה מקרי רציף דהיינו אם לכל $-\infty < x < \infty$ מתקיים $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ א"ש $f_X(t)$ פונקציה רציפה.

פונקציה f בטאת נקטאת פונקציות רציפות של X שפוא רחא פונקציות הסתברות מצורת F . דאובן טרמי פונקציות רציפות יכולה רכואת פונקציות של פונקציות הסתברות המצורת F . זאת אומרת של F גזירה אם דאובן טרמי יש רכא פונקציות רציפות.

$$f = F'$$

הצרה
פונקציות רציפות אינה יחידה כי ניתן לטעות את ציבה דמספר קטן של נקודות (למשל סביב) וצדיין פאינטלאל רכא ישתנה.

מתקיים $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

כמו אגדי משתנים מקריים דרז'ים, יש גם משפחות של משתנים מקריים רצפים, אלה הם משתנה מקרי רציף ש"ק למספרה של משתנים. משתנה מקרי אחיד רציף

$$X \sim U(a, b)$$

גבו משתנה שמקורו ערכים רק בקטע שבין a ל b. בהסתברות של כל תת קטע של הקטע (a, b)

פרופורציונלית לאורכו. פונקציות ההסתברות המצטוות של משתנה U(a, b) היא

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

אגדי נקודה שקטנה מ a, המשתנה לא יכול לקבל ערך קטן אלו שווה לה. אגדי נקודה שבצורה מ b, המשתנה ח"ק לקבל ערך קטן ממנה (מקום רק ערכים ב (a, b)).

למעלה

$$X \sim U(20, 50)$$

? $P(X > 50)$, $P(X \geq -10)$, $P(X \geq 60)$ מה N
 $P(-5 \leq X \leq 30)$, $P(30 \leq X \leq 45)$, $P(X \leq 30)$

פתרון

$$P(X \geq 60) = 1 - P(X < 60) = 1 - P(X \leq 60) =$$

(קבוצה מתקדמת
שהיא תמיד אפס)

$$= 1 - F_X(60) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X \geq -10) = 1 - P(X < -10) = 1 - F_X(-10) = 1 - 0 = 1$$

$$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X \leq 30) = \frac{30 - 20}{50 - 20} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

טענה

אם $X \sim U(a, b)$ יש פונקציה צפיפות $\frac{1}{b-a}$ קבוע
 על $a < x < b$.

הפונקציה הצפיפות היא $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ על $a < x < b$
 פונקציה שהיא אפס על $x < a$ והיא 1 על $x > b$.

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

פונקציה צפייה של משתנה

משתנה אקספוננציאלי $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$ הוא פרמטר השכיחות.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$$

? $P(2 \leq X \leq 3)$

משנ. $X \sim \text{Exp}(3)$

פתרון

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= F_X(3) - F_X(2) = \\ &= [1 - e^{-3 \cdot 3}] - [1 - e^{-3 \cdot 2}] = e^{-6} - e^{-9} \end{aligned}$$

לפי פונקציות הצפיפות

$$f_X(x) = F'_X(x) = 3 \cdot e^{-3x}$$

פתרון שני

מתק"ם

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 f_X(t) dt =$$

מתק"ם

$$= \int_2^3 3 \cdot e^{-3t} dt$$

שאלה

נתון משתנה $X \sim \exp(1)$, מצאו את פונקציית ההסתברות
 המצטברת של X^2 .

פתרון

$$Y = X^2$$

נגזר

$$F_Y(y) = 0$$

עבור $y < 0$:

עבור $y > 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) =$$

$$= F_X(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

$$\therefore F_{X^2}(y) = F_Y(y) \quad \text{מתק"ם}$$

תכונת חוסר הזכרון למשתנים מקריים

על המשתנה הדיסקרטי הבינאומי האינו שם הוא תכונת

חוסר הזכרון. זאת נ/ה למשתנה הדיסקרטי הבינאומי יש את תכונת חוסר

הזכרון.

י"פ' (קרי) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. מתקיים עבור $a > 0$:

$$P(X > a+x | X > a) = \frac{P(X > a+x, X > a)}{P(X > a)} = \frac{P(X > a+x)}{P(X > a)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(a+x)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda x}$$

* (המאורע $(X > a+x)$ מופץ דמיוני ל $(X > a)$.)

המחשה

כוס שת"ה שרזת עז שפיל נפלת. קפ"נתן שפיל/ שרזת כזר עז זמן a (זאת אומרת עמדת a), הסיכוי שיה שרזת עז זמן $a+x$ (עמדת) שולל עסיכוי פתקרי שפיל עז שרזת עז זמן b (עמדת).

משתנים מקריים שאינם דו־צדדיים ואינם רציפים

נסתם את משתנה X שלו פונקציית ההסתברות המצוינת

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & x = 0 \\ 0.2 + x & 0 < x < 1.6 \\ 1 & 1.6 < x \end{cases}$$

פונקציית ההסתברות המצוינת אינה רציפה בקצו 0.
 לכן המשתנה אינו רציף.

פונקציית ההסתברות המצוינת עולה עבור $0 \leq x \leq 1.6$.
 לכן המשתנה יכול לקבל כל ערך בקטע זה, לכן המשתנה
 גם אינו דו־צדדי.

את הפעיק 0 המשתנה מקבל בהסתברות 0.2 שבה הוא
 הקבילה של פונקציית ההסתברות המצוינת בקצו 0.
 ערכים נוספים יכולים להיחשב, אולם הם מתקבלים בהסתברות
 אפס כי אין קבוצות נוספות של פונקציית ההסתברות
 המצוינת.
צגת נוספת

אם מכיר נמכר את הפטל משם את בקבוצה נמך פחית
 $(X) \sim \text{Exp}$. אם הפטל לא נמכר אז הפטל לא משם אלא אחר
 אלא פעם. אם יש בהסתברות חולית שבה לא ימכר וזו
 ההסתברות חולית שבה ימכר, אז הפעיק 0 מתקבל בהסתברות
 חולית וזו אף להחשב גם את ערך חולית, אם כי הפעיק
 השונים מ 0 מתקבלים בהסתברות אפס.