<u>מבוא להסתברות/ קומבינטוריקה</u>

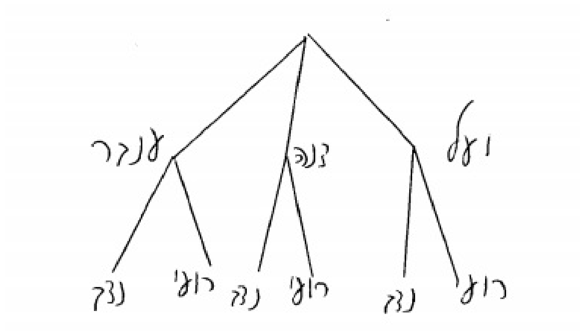
שלומי

נפתח <u>בדוגמאות</u> ורק אחר כך נכליל אותן לדברים כלליים.

<u>שאלה</u>

יש 3 בנות דנה, יעל וענבר ויש 2 בנים רועי ונדב. כמה אפשרויות יש לבחירת בת ובן.

<u>תשובה</u>



בעץ יש 6 עלים. זה מצביע על כך שיש 6 אפשרויות לבחירה. הסתמכנו כאן על <u>כלל הכפל</u>. בשלב הראשון יש 3 אפשרויות לבחירה ובשלב השני יש 2 אפשרויות לבחירה. המספר הכולל הוא המכפלה $3 \cdot 2$.

כללית מספר האפשרויות הוא המכפלה של ערכי a_k כאשר a_k הוא מספר האפשרויות בשלב ה k.

<u>שאלה</u>

יש n אנשים. רוצים לבחור מהם יו"ר וגזבר. כמה אפשרויות יש ?

<u>א</u> אם הם חייבים להיות שונים.

<u>ב</u> אם הם לא חייבים להיות שונים.

<u>תשובה</u>

<u>א</u>. יש n אפשרויות לבחירת יו"ר ואחר כך $n-1$ אפשרויות לבחירת גזבר. לכן בסך הכל יש $n(n-1)$ אפשרויות. $a_1 = n$, $a_2 = n-1$.

<u>ב</u>. יש n אפשרויות לבחירת יו"ר ואחר כך n אפשרויות לבחירת גזבר. לכן בסך הכל יש n^2 אפשרויות. כאן $a_1 = n$, $a_2 = n$.

<u>שאלה</u>

מסדרים n אנשים לאורך שורה. כמה סידורים יש ?

<u>תשובה</u>

לפי כלל הכפל יש $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ אפשרויות.

<u>שאלה</u>

בהמשך לשאלה הקודמת נניח שדורשים שיעל תשב ליד דוריס. כמה אפשרויות יש עכשיו ?

<u>תשובה</u>

כעת יש $2(n-1)!$ אפשרויות. בשלב הראשון בוחרים סדר פנימי ליעל ודוריס ובשלב השני מסדרים את האנשים כאשר יעל ודוריס הן יחידה אחת. לאחר שהצמדנו את יעל לדוריס אז ירד מספר האלמנטים לסידור ב 1.

<u>שאלה</u>

כמה מילים באורך 20 שמורכבות מהאותיות א' וב' יש ?

תשובה
יש 2^{20} מילים כאלה. לגבי כל מקום במילה יש שתי אפשרויות.

שאלה
בכמה מילים מבין אלה יש גם לפחות א' אחד ולפחות ב' אחד ?
תשובה
יש $2^{20}-2$ מילים כאלה. מהמילים שספרנו בשאלה הקודמת צריך להחסיר את שתי המילים של הכל א' ושל הכל ב'.

קבוצת המילים שמורכבות רק מאות אחת היא המשלים של הקבוצה המבוקשת. המשלים הוא הקבוצה של האיברים שאינם כלולים בקבוצה המקורית. כאן היה לנו נוח יותר לחשב את גודל קבוצת המשלים מאשר לחשב ישירות את גודל הקבוצה המקורית. במקרה זה קבוצת המשלים הכילה רק שתי מילים.

שאלה
נתונה קבוצה של 20 אנשים. בכמה דרכם ניתן לבחור בועד של נשיא, גזבר ויו"ר אם שלושתם צריכים להיות אנשים שונים. ?
תשובה
$20 \cdot 19 \cdot 18$

שאלה
כמה אפשרויות כאלה יש אם בועד אין תפקידים ורק צריך לבחור 3 אנשים ?
תשובה

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

אם יעל, נדב ודב הם בועד אז ניתן לחלק להם תפקידים ב $3!$ דרכים. במקרה של השאלה הזאת כל אחת מהבחירות נמצאת בקבוצה של $3!$ סידורים של השאלה הקודמת ששקולים אחד לשני. נרשום כאן בטבלה את האפשרויות ששקולות אחת לשניה.

גזבר	נשיא	יו"ר
דב	נדב	יעל
נדב	דב	יעל
דב	יעל	נדב
יעל	דב	נדב
נדב	יעל	דב
יעל	נדב	דב

<u>מדגמים</u>

מדגם של m פרטים מתוך קבוצה של n פרטים הוא בחירה של m פרטים מתוך n פרטים.
אפשר לעשות את הבחירה עם או בלי חשיבות לסדר.
אפשר לעשות את הבחירה עם החזרות או בלי החזרות.

בלי חשיבות לסדר	עם חשיבות לסדר	
יש סיכום על זה באתר ואפשר לדבר איתי על כך. לא נזדקק לזה בחישובים שנעשה.	n^m	עם החזרות
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$	בלי החזרות

$(n)_m$היא מכפלת m המספרים השלמים הגדולים ביותר עד n. הקטן שבהם הוא $n-m+1$.
דוגמא לבחירה בלי החזרות וללא חשיבות לסדר היא בחירת הועד שבו אין תפקידים. מחלקים ב $m!$ *כי אין חשיבות לחלוקת התפקידים.*

<u>הסתכלות</u> אחרת על $\binom{n}{m}$

נבחר m פרטים מתוך n פרטים על ידי כך שנסדר את n הפרטים בשורה ונבחר את m הפרטים הימניים ביותר בסידור שהתקבל. ניתן לסדר את הפרטים ב $n!$ אפשרויות. אבל הסידור הפנימי של m הפרטים הימניים ביותר לא רלוונטי לבחירה וגם הסידור הפנימי של $n-m$ האיברים השמאליים ביותר לא רלוונטי. לכן מחלקים ב $m!$ וגם ב $(n-m)!$.

<u>שאלה</u>

יש 30 תלמידים בכיתה. בכמה דרכים ניתן לבחור בועד של נשיא ועוד 4 חברים.

<u>תשובה</u>

$$\binom{30}{1}\binom{29}{4} = \binom{30}{4}\binom{26}{1} = \binom{30}{5}\binom{5}{1}$$

או שבוחרים בנשיא ובעוד 4 חברים מבין היתר או שבוחרים ב 4 חברים ובנשיא מבין היתר או שבוחרים ב 5 חברים ומהם בוחרים בנשיא.

<u>שאלה</u>

יש 50 גפרורים שמתוכם 20 הם שרופים. בכמה דרכים ניתן לבחור ב 3 גפרורים כך שניתן יהיה להדליק אש באמצעותם ? (מספיק שאחד מהם יהיה לא שרוף).

<u>פתרון ראשון</u>

$$\binom{30}{3} + \binom{30}{2}\binom{20}{1} + \binom{30}{1}\binom{20}{2}$$

(או ששלושתם לא שרופים או ששניים לא שרופים ואחד שרוף או שאחד לא שרוף ושניים שרופים).

<u>פתרון נוסף</u>

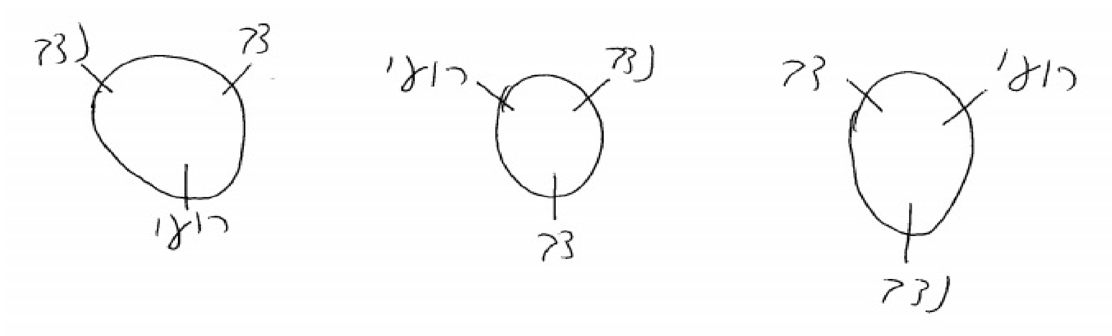
$$\binom{50}{3} - \binom{20}{3}$$

(מתוך כלל האפשרויות מחסירים את האפשרויות שבהן כולם שרופים).
בפתרון הנוסף שוב השתמשנו בקבוצת המשלים במקום לחשב ישירות את גודל הקבוצה המקורית.

שאלה
בכמה סידורים ניתן לסדר את נדב, דב ורועי סביב מעגל ?
תשובה

$$\frac{3!}{3} = (3-1)! = 2!$$

אין משמעות למיקומו של הראשון. כל סידור יכול להיות מושג לאחר שנמקם את הראשון בכל מקום. חשוב רק איך האחרים מסתדרים ביחס לראשון לאחר שמיקמנו את הראשון. כל סידור נמצא בקבוצה של 3 סידורים ששקולים אחד לשני. נתאר כאן 3 סידורים ששקולים אחד לשני.



באופן כללי יש $(n-1)!$ סידורים של n איברים סביב מעגל.

שאלה
מסדרים 50 אנשים סביב מעגל. בכמה סידורים יושבת צליל ליד דנה !
תשובה
$2!\,48!$
תחילה קובעים האם צליל תשב מימין לדנה או משמאלה. אחר כך מתייחסים לצליל ולדנה כאל אלמנט אחד. כך נשארו 49 אלמנטים שאותם ניתן לסדר סביב מעגל ב $48!$ סידורים.

שאלת המשך
בכמה סידורים צליל לא תשב ליד דנה ?
תשובה

$$49! - 2!\,48!$$

כאן מחסירים מכלל האפשרויות את האפשרויות שצליל יושבת ליד דנה.

זהויות

זהות
הוכיחו ש $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

פתרון ראשון שהוא אלגברי

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

קבלנו שיוויון בין האגפים.

פתרון בדרך שניה

נתונה קבוצה של n פרטים. רוצים לבחור מתוכם k פרטים. יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות.
כל בחירה שקולה לבחירת הפרטים שלא יהיו בקבוצת הנבחרים. אם קובעים את קבוצת אלה שלא יהיו בנבחרים אז למעשה קובעים גם את קבוצת הנבחרים. יש $\binom{n}{n-k}$ דרכים לבחור את המשלים לקבוצת הנבחרים.

זהות שניה

הוכיחו ש $\binom{n}{k}\cdot k = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

פתרון ראשון

אגף שמאל

$$\binom{n}{k}k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot k = \frac{n!\cdot k}{k(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

פתרון שני

מתוך קבוצה של n אנשים רוצים לבחור בועד שבו יו"ר ועוד $k-1$ חברים. כמה אפשרויות יש ?
גישה ראשונה: נבחר אדם שיהיה יו"ר. יש n אפשרויות לכך. מתוך יתר $n-1$ האנשים נבחר ב $k-1$ חברים נוספים לועד. גישה זאת מבוטאת באגף ימין.
גישה שניה: נבחר בועד שבו k אנשים ומתוכו נבחר ביו"ר. גישה זאת מבוטאת באגף שמאל.

לפני שנפנה לזהויות הבאות נמחיש את המושג סיגמא באמצעות כמה דוגמאות.

$$\sum_{k=m}^{n} k = m + (m+1) + \cdots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Σ (סיגמא) זהו סכום של איברים בטווח מסוים.

שאלה

הוכיחו את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

הסבר

באגף ימין יש ספירה של האפשרויות לבחור n אנשים מתוך $2n$ אנשים. זהו גם מספר האפשרויות לבחירת n אנשים מתוך קבוצה של $2n$ אנשים שמורכבת מ n בנים ומ n בנות.
לגבי אגף שמאל מתקיים $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$
נראה שגם ביטוי זה מתאר בחירה של n אנשים מתוך n בנים ו n בנות. יש כאן חלוקה לפי מקרים של מספר הבנים שנבחרים. אם בוחרים k בנים אז יש לבחור $n-k$ בנות. k יכול לנוע בין 0 ל n.

כל המקרים האלה הם זרים ואיחודם מכסה את כל האפשרויות. זאת אומרת שכל מקרה נספר בדיוק פעם אחת.

<u>שאלה</u>

הוכיחו את הזהות $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}$

<u>נוכיח</u> באמצעות סיפור. נראה ששני האגפים מתארים ספירה של מספר אפשרויות באותו סיפור.
נתונה קבוצה של n אנשים. רוצים לבחור בועד שבו יש נשיא וגזבר ועוד קבוצה כלשהי של אנשים. הקבוצה של האנשים. הקבוצה של האנשים הנוספים יכולה להיות כל תת קבוצה של יתר האנשים, למשל היא יכולה להיות הקבוצה הריקה.
אגף שמאל מסכם את מספר האפשרויות בבחירת k אנשים כאשר k הוא לפחות 2 כאשר בהמשך בוחרים מהקבוצה הנבחרת נשיא וגזבר שהם שונים. ממצים את כל האפשרויות על פני כל ערכי k האפשריים. כל המקרים הם זרים.
באגף ימין בוחרים בנשיא ובגזבר שונים ואחרי בחירתם ממצים את כל האפשרויות לבחירת תתי קבוצות של יתר האנשים. אחרי בחירת היו"ר והגזבר נשארו $n-2$ אנשים. לגבי כל אחד מהם אפשר להחליט אם לבחור אותו או לא לבחור אותו. לגבי כל אדם כזה יש שתי אפשרויות. על פי כלל הכפל, המספר הכולל של האפשרויות הוא 2^{n-2}.

<u>שאלה</u>

הוכיחו את הזהות $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

<u>הסבר</u>

שני האגפים מתארים בחירה של k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים. באגף ימין יש חלוקה לשני מקרים זרים שאיחודם מכסה את כל האפשרויות. המקרה הראשון הוא שהדר לא נבחרת, והבחירה של k האנשים נעשית רק מיתר האנשים. המקרה השני הוא שהדר כן נבחרת. במקרה זה צריך לבחור רק עוד $k-1$ אנשים מבין יתר $n-1$ האנשים.

נשתמש בזהות האחרונה כדי לבנות את <u>משולש פסקל</u> שבו אין סוף שורות.

נשים לב שמתקיים $\binom{n}{0} = 1$ וגם $\binom{n}{n} = 1$ (אם לא בוחרים אף אחד או שבוחרים את כולם אז יש רק אפשרות אחת).
נשים לב שעבור כל n מתקיים $\binom{n}{1} = n$.
במשולש פסקל השורה הראשונה שמכילה רק איבר בודד מייצגת את מספר האפשרויות לבחירת 0 פרטים מתוך 0 פרטים. לשורה זו נקרא השורה האפס. בהמשך בכל שורה n מופיעים מספרי האפשרויות לבחירת k איברים מתוך קבוצה של n איברים, כאשר ערכי k נעים מ 0 עד n.
לפי הזהות האחרונה, כל איבר שווה לסכום שני האיברים הסמוכים לו בשורה שמעליו.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\vdots$$

<u>הבינום של ניוטון</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

נתחיל את ההסבר לנוסחא בדוגמא פרטית.
מתקיים $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. מדוע המקדם של a^3 הוא 1 ?
אגף שמאל הוא $(a+b)(a+b)(a+b)$. הגורם a^3 מתקבל רק מבחירת a מכל זוג סוגריים שבמכפלה. יש רק בחירה אחת כזאת.
מדוע המקדם של a^2 הוא 3
הגורם a^2 מתקבל מבחירת a בשני זוגות סוגריים ובחירת b בזוג הסוגריים השלישי. יש $\binom{3}{2}$ אפשרויות לבצע בחירה כזאת.
באופן דומה $(a+b)^n$ היא מכפלה של n גורמי $(a+b)$. הגורם $a^k b^{n-k}$ מתקבל מבחירה k פעמים של a ו $n-k$ פעמים b. יש לכך $\binom{n}{k}$ אפשרויות.

<u>שאלה</u>

הוכיחו את הזהות $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

<u>הוכחה</u>

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

המעבר הלפני אחרון הוא שימוש של הבינום של ניוטון כאשר ה a וה b מנוסחת הבינום שווים כל אחד ל 1.

<u>שאלה</u>

הוכיחו את הזהות $\sum_{k\ odd}\binom{n}{k} = \sum_{k\ even}\binom{n}{k}$.

תחילה נראה הוכחה למקרה הפרטי ש $n = 5$.

צריך להראות ש $\binom{5}{5}+\binom{5}{3}+\binom{5}{1} = \binom{5}{4}+\binom{5}{2}+\binom{5}{0}$.

זה נובע מכך שמתקיים $\binom{5}{5} = \binom{5}{0}$, $\binom{5}{4} = \binom{5}{1}$, $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

כעת ננסה שיטה דומה למקרה הפרטי $n = 4$.

צריך להראות ש $\binom{4}{3}+\binom{4}{1} = \binom{4}{4}+\binom{4}{2}+\binom{4}{0}$.

כאן אין חלוקה לזוגות שמקזזים זה את זה. לכן הדרך הזאת לא מצליחה.

נתן הוכחה כללית שמתבססת על נוסחת הבינום.

צריך להראות ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^K = 0$, זאת אומרת שההפרש בין המקדמים עבור k זוגי לבין אלה שעבור k אי זוגי הוא אפס.

מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$$

כאן ה a וה b מנוסחת הבינום היו -1 ו 1.

שלומי