<u>הלמה של בורל קנטלי</u>

שלומי

נדון תחילה בסדרות של מאורעות. כל מאורע בסדרה יכול להתקיים או לא להתקיים.

<u>שאלות למוטיבציה</u>

מבצעים אינסוף הטלות בלתי תלויות של מטבעות. האם התוצאה 1 תתקבל אינסוף פעמים ?

<u>א</u>. אם בכל הטלה ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{3}$.

<u>ב</u>. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

<u>ג</u>. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n^2}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

<u>הגדרה</u>

תהי נתונה סדרה של מאורעות A_i. אומרים שהמאורעות מתרחשים $i.o.$ אם מתרחשים אינסוף מאורעות A_i ($i.o.$ זה ראשי תיבות ל infinity often).

<u>הערה שתובהר בהמשך</u>

יש סדרות שלגביהן אפשר לקבוע מראש אם יתקיימו אינסוף מאורעות או לא. יש סדרות אחרות שלגביהן בהסתברות מסוימת שהיא בין 0 ל 1 זה מתרחש.

<u>משפט</u> (הלמה של בורל קנטלי)

תהי $(A_n \quad : \quad n \geq 1)$ סדרה אינסופית של מאורעות. אזי מתקיימות הטענות הבאות:

<u>א</u>. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אזי $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

<u>ב</u>. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ והמשפחה $\{A_1, A_2, \cdots\}$ ב"ת אזי $P(A_n \quad i.o.) = 1$.

<u>הוכחה</u>

<u>א</u>. $(A_n \quad i.o.) \subset \bigcup_{k \geq m} A_k$ לכל $m \geq 1$ ולכן: $P(A_n \quad i.o.) \leq P\left(\bigcup_{k \geq m} A_k\right) \leq \sum_{k \geq m} P(A_k)$. אך, $\lim_{m \to \infty} \sum_{k \geq M} P(A_k) = 0$ (שהרי $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$: זהו טור מתכנס) ולכן $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

<u>ב</u>. נוכיח ש- $P(A_n \quad i.o.)^c = 0$; כלומר: $P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$. בשביל זה מספיק להראות ש- $P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$ לכל $n \geq 1$ (כי איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס הוא בעל הסתברות אפס). אך, לכל $x \in \Re$ מתקיים $1 - x \leq e^{-x}$ ולכן מאי-תלותם של המאורעות $A_n \quad n = 1, 2, \cdots$ נקבל: $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{n+j} \left(1 - P(A_k)\right) \leq \prod_{k=n}^{n+j} e^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right)$ וכאשר $j \to \infty$ גם $\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k) \to \infty$ (שהרי $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$) ולכן $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right) \to 0$. מכאן: $P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = \lim_{j \to \infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) = 0$ לכל $n \geq 1$.

כעת משהוכחנו את שתי הטענות שבלמה, נוכל לענות על שאלות המוטיבציה ששאלנו בתחילה.

מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}=\infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ ונתון שבכל אחד מהמקרים המאורעות הם בלתי תלויים, אז בשני הסעיפים הראשונים בהכרח יתקיימו אינסוף מאורעות. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ אז במקרה השלישי בהסתברות 1 יתרחשו מספר סופי של מאורעות, זאת אפילו בלי הזדקקות לתנאי האי תלות.

<u>שאלה</u>
האם אפשר לוותר על תנאי האי תלות בחלק השני של הלמה ?
<u>תשובה</u> לא
נניח שמטילים מטבע הוגן בודד שעל בדיוק צד אחד שלו כתוב 1. נניח שכל אינסוף המאורעות הם זהים וכל אחד מהם שווה לאינדיקטור שהמטבע הראה 1. בסיכוי של חצי יתרחשו אינסוף מאורעות ובסיכוי של חצי לא יתרחש אף מאורע.

<u>שאלה</u>
תהי $\{X_n\}$ סדרה של משתנים $\exp(1)$. ב"ת.
האם יתרחשו אינסוף מאורעות $(X_n>c\log(n))$?
<u>תשובה</u>
עבור משתנה $\exp(1)$ מתקיים עבור כל $a\ge 0$: $P(X\ge a)=e^{-a}$.
לכן כאן מתקיים עבור כל n : $P(X_n>c\log(n))=e^{-c\log(n)}=n^{-c}$.
עבור $c\le 1$ מתקיים $\sum n^{-c}=\infty$ ועבור $c>1$ מתקיים $\sum n^{-c}<\infty$.
לכן יתרחשו אינסוף מאורעות אם"ם $c\le 1$.
(תנאי האי תלות מאפשר שימוש גם בכיוון השני של הלמה).

<u>שאלה</u>
קוף מקליד מעתה ועד עולם באופן אקראי על מקלדת. האם הוא יקליד לפחות פעם אחת ברצף את התנך ?
<u>תשובה</u> כן
התנך הוא ארוך מאוד אך אורכו הוא איזשהו M סופי. כל תו נבחר מבין מספר סופי a של תוים. בכל רצף של M הקלדות, הסיכוי להקליד את התנך הוא $\frac{1}{a^M}$. זהו מספר קבוע. רצפים שיש בינהם חפיפה הם תלויים. אך נבחר אוסף אינסופי של רצפים זרים. באוסף זה הרצף ה- k יתחיל במקום $kM+1$ עבור כל k טבעי. כך לא יהיו חפיפות בין הרצפים השונים ותהיה אי תלות בין המאורעות של הצלחה ברצפים שונים. נקבל אוסף של מאורעות בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש הסתברות קבועה $\frac{1}{a^M}$.
לכן בהכרח יתרחשו אינסוף הקלדות של התנך.

<u>שאלה</u>
בשלב ה- n מוציאים כדור מכד שבו כדור לבן ו $n-1$ כדורים שחורים.
האם מתקיים שאינסוף פעמים נוציא כדור לבן ? האם לפחות 5 פעמים יהיה רצף של שני כדורים לבנים ?
<u>תשובה</u>
יהי A_n - המאורע של הוצאת כדור לבן בפעם ה- n , $\mathrm{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

$\sum P(A_n)=\sum\frac{1}{n}=\infty$, לכן אם מניחים שיש אי תלות בין המאורעות אז בהסתברות 1 יתרחשו ∞ הוצאות של כדורים לבנים.

יהי B_n - המאורע שבפעם ה- n וגם בפעם ה- $n+1$ נקבל כדור לבן. $P(B_n)=\frac{1}{n(n+1)}$

ו $\sum P(B_n)=\sum\frac{1}{n(n+1)}=1$. זה אומר לנו שלא יהיו אינסוף רצפים של שני כדורים לבנים. אך זה לא עונה לשאלה אם יהיו לפחות 5 רצפים. נתגבר על בעיה זו:
כמובן שיתכן שבהוצאה השניה יוצא כדור שחור. אם זה יתרחש אז הרצף הראשון לא יהיה של שני כדורים לבנים. מתקיים $\sum_{n=2}^{\infty}P(B_n)<1$ לכן לא ודאי שהחל מהרצף השני נקבל איזשהו רצף של שני כדורים לבנים. בסיכוי ששווה לפחות למכפלת ההסתברויות שהכדור הראשון שחור ובהמשך לא יהיה רצף של לבנים, נקבל שלא יהיה אף רצף של כדורים לבנים.

<u>שאלה</u>
בוחרים באקראי אחד משני כדים. באחד מהם יש שני כדורים לבנים ושלושה כדורים שחורים ובשני יש רק ארבעה כדורים שחורים. מהכד הנבחר מבצעים סדרה אינסופית של הוצאות עם החזרה של כדורים.
מהי ההסתברות שנוציא אינסוף כדורים לבנים ? איך זה מסתדר עם הלמה של בורל קנטלי ?
<u>תשובה</u>
אם יבחר הכד הראשון אז בודאות יהיו אינסוף כדורים לבנים (בדקו זאת לפי הלמה של בורל קנטלי).
אם יבחר הכד השני אז בודאות לא יהיה אף כדור לבן. לכן בסיכוי 0.5 יהיו אינסוף כדורים לבנים.
מתקיים שבכל הוצאה הסיכוי לכדור לבן הוא $0.5\cdot\frac{2}{5}+0.5\cdot 0=\frac{1}{5}$ ו $\sum\frac{1}{5}=\infty$, אך המאורעות הם תלויים ולכן התוצאה של הוצאה אחת מרמזת על התוצאה של הוצאה אחרת.